ESTRUTURA SPINORIAL EM VARIEDADES LORENTZIANAS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Vera Lucia Xavier Figueiredo e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 15 de outubro de 1987

Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Outubro - 1987

F469e

8856/BC

ESTRUTURA SPINORIAL EM VARIEDADES LORENTZIANAS

Vera Lucia Xavier Figueiredo

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.
Orientador

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Matemática.

Outubro – 1987

UNICAMP
BIBLIOTE[illegible]

A meus pais,
Mario e Lourdes pelo
respeito recebido.

Com respeito
e
com carinho

Sua filha
Vera Lucia

Meus agradecimentos

Ao Prof. Waldyr A.Rodrigues Jr. pela orientação recebida, pelo estímulo e incentivo constantes e por sua grande disposição de trabalho.

Ao Prof. E.Recami, pelos incentivos recebidos.

Ao Prof. A.Conde, por ser responsável por grande parte de minha formação acadêmica.

Ao Prof. A.Rigas pelos esclarecimentos de minhas dúvidas, sempre com muita disposição.

Aos Professores Edmundo C.Oliveira e Quintino A.G. de Souza pela colaboração numa hora necessária.

Aos meus amigos: Miriam, M.Alice, Adolfo, Joni, Silvio, Rodney, Sueli, Gilli, Itala (eles sabem os motivos!)

Ao meu companheiro Nivaldo, e a meus filhos Thiago, Carolina, André e Julia, por poder amá-los.

RESUMO: Este trabalho tem dois objetivos principais. O primeiro consiste em esclarecer as diferentes definições e representações de spinores que aparecem na literatura, a saber: *Spinores* covariantes (c-spinor) definidos como elementos de espaços vetoriais complexos, munidos de um "produto escalar" que são invariantes sob a ação de certos grupos de Lie; *spinores algébricos*, (a-spinor) definidos como elementos de ideais minimais apropriados de algebras de Clifford apropriadas e *spinores operatoriais* (o-spinor) definidos como números de Clifford em uma algebra de Clifford apropriada $\mathbb{R}_{p,q}$ que determina um conjunto de tensores por intermédio de aplicações bilineares.

Explorando a estrutura dos espaços de representação das algebras de Clifford reais conseguimos definir "produtos escalares" nestes espaços invariantes sob a ação de subgrupos da algebra. Usando o fato que para $p+q \leq 4$ $\mathrm{Spin}^{+}(p,q) = \{z \in \mathbb{R}^{+}_{p,q} ; z\bar{z} = 1\}$ conseguimos representar os c-spinores usados em Física Teórica por intermédio dos a-spinores. O segundo objetivo é passar a estrutura de a-spinores e c-spinores a fibrados sobre variedades Lorentzianas de dimensão 4. Tal é feito analisando-se inicialmente o que significa que tais variedades possuam uma estrutura spinorial. Nossas técnicas são originais e se originam na exploração da construção dos fibrados de Clifford reais sobre variedades Lorentzianas. Esclarece-também diversos pontos que são essenciais para a aplicação do conceito de estrutura spin em Física Teórica.

ABSTRACT: This thesis have two main purposes. The first is to clear up the different definitions and representations of spinors appearing in the literature. These are: *covariant spinors* (c-spinors) defined as elements of complex vector spaces equiped with a "scalar product" which are invariant under the action of certain Lie groups; *algebraic spinors* (a-spinors) defined as elements of a minimum lateral ideal in an appropriate Clifford algebra $\mathbb{R}_{p,q}$ and *operatorial spinors* (o-spinors) defined as Clifford numbers in an appropriate Clifford algebra, determining a set of tensors by bilinear mappings.

Exploring the structure of the representation's spaces of the real Clifford algebras we define "scalar products" in these spaces which are invariant under the action of certain subgroups of the algebra. Using the fact that for $p+q \leq 4$, $\mathrm{Spin}^+(p,q)=\{z \in \mathbb{R}^+_{p,q}, z\bar{z} = 1\}$ we find a way to represent the c-spinors used in Theoretical Physics by means of a-spinors.

The second main purpose of this thesis is to adapt the structure of a-spinors and c-spinors to fibre bundles over Lorentzian manifolds of dimension 4. This is done by analysing what means such manifolds to possess a spinorial structure. Our technics are original and have its roots in the exploration of the construction of the Clifford bundles over Lorentzian manifolds. We clear also several points which are essential for the applications of the concept of spinor structure in Theoretical Physics.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Na tentativa de representar o mundo a nossa volta, os físicos teóricos se utilizam cada vez mais de conceitos e teorias matemáticas. Em particular, na descrição das partículas elementares, dita fermions (como o eletron, por exemplo) foi necessário introduzir já na mecânica quântica não relativistica o conceito de spinor covariante de Pauli. Estes objetos são vetores de um espaço bi-dimensional complexo $\mathbb{C}(2)$ munido de uma "metrica spinorial", isto é, $\beta_p : \mathbb{C}(2) \times \mathbb{C}(2) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\beta_p(\psi,\varphi) = \psi^*\varphi$

$$\psi = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \ \psi = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \ ; \quad z_i, w_i \in \mathbb{C} \ , \quad i = 1,2. \quad \psi^* = (\bar{z}_1, \ \bar{z}_2)$$

$\bar{z}$ o complexo conjugado de z.

Tal métrica é invariante pela ação do grupo SU(2), isto é, se $u \in SU(2)$ então $\beta_p(u\psi, u\varphi) = \beta_p(\psi,\varphi)$.

No desenvolvimento da mecânica quântica relativistica, por Dirac, aparecem outros tipos de spinores covariantes (ver Cap.II). Em particular, do estudo da equação de Dirac fica evidente que os chamados spinores covariantes de Dirac estão de alguma forma relacionados com a particular algebra de Clifford $\mathbb{R}_{4,1} \simeq C(4)$. Em vista disto M.Riez sugeriu uma nova definição de spinor, dito spinor algébrico. Mais recentemente D.Hestenes sugeriu uma outra definição de spinor dita spinor operatorial.

Em resumo, existem na literatura muitas definições e representações distintas de spinores, mas não existe uma única referência que explique como elas estão relacionadas.

Neste trabalho examinamos três definições distintas de spinores, (i) a definição covariante (E.Cartan), onde uma espécie particular de spinor covariante (c-spinor) é um conjunto de variáveis complexas definidas por suas transformações sob um grupo spin particular; (ii) a definição ideal (M.Riez), onde uma espécie particular de spinor algébrico (a-spinor) é definida como um elemento de um ideal lateral minimal em uma álgebra de Clifford apropriada $\mathbb{R}_{p,q}$; (iii) a definição operatorial (D.Hestenes) onde uma espécie particular de spinor operatorial (o-spinor) é definido como um número especial de Clifford de uma apropriada álgebra de Clifford.

Introduzindo o conceito de "produto escalar" no espaço vetorial dos spinores algébricos, provamos que para $p + q \leq 4$ existe uma equivalência (do ponto de vista de teoria de representação de grupos) entre os c-spinores e os a-spinores nos casos importantes usados em Física Teórica, isto é, para os spinores de Pauli , Dirac e aqueles de duas componentes, pontuados e sem pontuação.

Para tanto foi necessário introduzir diversos conceitos referentes a estrutura das álgebras de Clifford (Capítulo I). Este capítulo originalmente concebido como pré-requisito, passou a fazer parte integrante do trabalho uma vez que esclarecemos uma dúvida encontrada na literatura a respeito da relação entre os subgrupos da álgebra de Clifford e os grupos ortogonais (I.8).

No Capítulo II estudamos a teoria dos spinores. Definimos "produto escalar" de spinores de uma maneira bem mais natural do que aparece na literatura, usando a estrutura real, complexa ou quaternionica dos espaços de representações das álgebras de Clifford reais, desenvolvida no Capítulo I.

Entre os resultados importantes encontrados apresentamos pela primeira vez na literatura a representação dos spinores co-variantes de duas componentes com pontuação e sem pontuação como elementos de ideais apropriados da álgebra de Clifford $R_{1,3}$, dita álgebra do espaço tempo ou álgebra de Minkowski. Provamos também que o grupo $Spin^{+}(1,3)$ carrega naturalmente a representação $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ do grupo $SL(2,C)$ que é o grupo de recobrimento universal do grupo de Lorentz homogêneo e restrito.

Existe na literatura um razoável número de artigos explorando as condições de se passar estas estruturas spinoriais pontuais para variedades lorentzianas de dimensão 4.

No capítulo III investigamos tal questão usando fibrado de Clifford.

Uma estrutura spinorial numa variedade Riemanniana M^n, orientada é a existência de um Spin(n) - fibrado principal (III.5.2) que "cubra o fibrado principal $P_{SO(n)}^{(M)}$ no sentido de encontrar um sistema de troca de coordenadas spinoriais que se relacione com a troca de coordenadas de TM.

Para passarmos esta estrutura para variedades Lorentzianas em primeiro lugar, construimos o fibrado de Clifford C(E) de um fibrado pseudo-Riemanniano $\pi : E \longrightarrow M$ e verificamos como eles estão relacionados com os fibrados $P_{O(p,q)}(E)$.

Tais fibrados são fibrados de álgebras que contêm subfibrados de grupos Pin(E) e Spin(E).

A construção de tais fibrados feita em (III.26) nos permitiu mostrar que toda variedade L Lorentziana, de dimensão 4 e de signatura (3,1) possui um idempotente globalmente definido de maneira contínua em todos os pontos de L (III.58).

Fizemos uma análise da definição de estrutura spinorial para variedades Lorentzianas encontrada na literatura em [25,26,27] e dos resultados já conhecidos. Tais artigos, em geral não exploram as álgebras de Clifford reais, sempre complexificam, e com isto, perde-se a noção da restrição que a métrica de Lorentz de signatura (1,3) [ou (3,1)] impõe à veriedade.

Usando fibrado de Clifford real do fibrado TL para variedades Lorentzianas de signatura (3,1), propomos uma nova visão de espaços de spinores e acreditamos que isto esclareça diversos pontos que são essenciais para a aplicação do conceito de estrutura spin em Física Teórica.

CAPÍTULO I

ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

I.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo procuraremos desenvolver a teoria das álgebras de Clifford necessária para o desenvolvimento do texto. Como referência básica recomendamos [1], [2] e [3]. Atiyah em [1] e Chevalley em [2] desenvolvem álgebras de Clifford para formas quadráticas negativas definidas, enquanto Lawson em [3] generaliza para formas quadráticas não degeneradas de signatura qualquer.

Apesar desta teoria ser bastante conhecida e ter uma vasta bibliografia, acreditamos que a nossa apresentação facilitará a compreensão dos leitores interessados na teoria spinorial.

I.2. ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

A cada espaço vetorial V n-dimensional sobre um corpo K, munido de um produto interno (forma bilinear simétrica não degenerada) está associada uma única álgebra de Clifford, da seguinte maneira:

2.1. Sejam V um espaço vetorial n-dimensional sobre um corpo K, $B : V \times V \longrightarrow K$ uma forma bilinear simétrica não degenerada e $Q : V \longrightarrow K$; $Q(x) = B(x,x)$, $\forall x \in V$ sua forma quadrática associada.

Considere $T(V)$ a álgebra tensorial de V ,

$T^r V = V \otimes \ldots \otimes V$, r-vezes, $r \geq 1$ o espaço dos elementos homogêneos de grau r de $T(V)$, $T^o(V) = K$, $T^1(V) = V$ e

$$T(V) = \sum_{i=0}^{\infty} T^i(V) .$$

Sabemos que $T(V)$ é uma álgebra associativa com unidade onde o produto é definido por: Dados dois elementos genéricos de $T(V)$, z e w , $z = z_o + z_1 + \ldots + z_k$ e $w = w_o + w_1 + \ldots + w_m$, $z_i \in T^i(V)$, $w_j \in T^j(V)$ temos

$$Z \otimes W = z_o \otimes w_o + (z_o \otimes w_1 + z_1 \otimes w_o) + (z_o \otimes w_2 + z_1 \otimes w_1 +$$

$$+ z_2 \otimes w_o) + \ldots + z_k \otimes w_m$$

onde cada produto $z_i \otimes w_j \in T^{i+j}(V)$ é dado pela multiplicação dos tensores $z_i \in T^i(V)$ e $w_j \in T^j(V)$. A unidade é o escalar $1 \in T^o(V) = K$.

Considere I_Q o ideal bilateral de $T(V)$ gerado pelos elementos $x \otimes x - Q(x)\cdot 1$ para $x \in V = T^1(V)$.

A álgebra quociente $T(V)/_{I_Q} = C(V,Q)$ é chamada a álgebra de Clifford de V e Q, que é uma álgebra associativa com unidade.

O produto em $C(V,Q)$ é chamado produto de Clifford que indicaremos por justaposição $zw = z \otimes w \pmod{I_Q}$.

Observe que V está naturalmente mergulhado em $T(V)$, basta identificar o vetor $v \in V$ com o elemento $0 + v + 0 + \ldots \in T(V)$.

Se considerarmos a inclusão i e a projeção j

$$V \xrightarrow{i} T(V) \xrightarrow{j} T(V)/_{I_Q} = C(V,Q) .$$

onde $I_Q = j \circ i$, temos V mergulhado em $C(V,Q)$. Para isto basta mostrar que i_Q é injetora, ou seja, se $\varphi \in V \cap I_Q$ então $\varphi = 0$. Se $\varphi \in V \cap I_Q$ então φ é uma soma finita de elementos do tipo $t \otimes (x \otimes x - Q(x) \cdot 1) \otimes t'$ onde $t,t' \in T(V)$ e $x \in V$. Podemos supor ainda que t e t' são elementos homogêneos de grau r e r' respectivamente, isto é, $t \in T^r(V)$ e $t' \in T^{r'}(V)$. Como $\varphi \in V = T^1(V)$ concluímos que $t \otimes x \otimes x \otimes t' = 0$. Isto implica que $t \otimes Q(x) \cdot 1 \otimes t' = 0$ pois $\varphi \in I_Q$. Assim, identificaremos V com $i_Q(V)$ em $C(V,Q)$ $(V \equiv i_Q(V))$.

A álgebra de Clifford construída desta maneira tem a seguinte *propriedade universal*.

2.2. Se A é uma álgebra associativa com unidade sobre um corpo K, então toda aplicação linear $\phi : V \longrightarrow A$ tal que $(\phi(x))^2 = Q(x) \cdot 1$, $\forall x \in V$ pode ser estendida de maneira única a um homomorfismo $\tilde{\phi} : C(V,Q) \longrightarrow A$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "i_Q"'] & & A \\ & C(V,Q) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

PROVA. Esta propriedade decorre da universalidade do produto tensorial $T(V)$. Sabemos que toda aplicação linear $\phi : V \longrightarrow A$ pode ser estendida a um único homomorfismo $\phi' : T(V) \longrightarrow A$ tal que $\phi'(x) = \phi(x)$, $\forall x \in V$. Basta tomar $\phi(x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_r}) = \phi(x_{j_1}) \dots \phi(x_{j_r})$ e $\phi'(1) = 1$. Observe que $I_Q \subset \operatorname{Ker} \phi'$ pois

$$
\begin{aligned}
\phi'(x \otimes x - Q(x) \cdot 1) &= \phi'(x \otimes x) - Q(x) \cdot \phi'(1) \\
&= \phi(x) \cdot \phi(x) - Q(x) \cdot 1 \\
&= Q(x) \cdot 1 - Q(x) \cdot 1 = 0 ,
\end{aligned}
$$

logo ϕ' induz um homomorfismo

$$\tilde{\phi} : C(V,Q) = T(V)/_{I_Q} \longrightarrow A .$$

Suponha agora que $\bar{C}$ é uma álgebra associativa com unidade sobre um corpo K e $i : V \longrightarrow \bar{C}$ um mergulho com a propriedade de que toda a aplicação linear $f : V \longrightarrow A$ (A uma álgebra associativa com unidade sobre um corpo K), tal que $(f(x))^2 = Q(x) \cdot 1$, $\forall x \in V$, estenda a um único homomorfismo $\bar{f} : \bar{C} \longrightarrow A$. Então o isomorfismo entre $V \subset C(V,Q)$ e $i(V) \subset \bar{C}$ induz um isomorfismo entre $C(V,Q)$ e $\bar{C}$.

2.3. Seja $C^o(V,Q)$ (respectivamente $C^1(V,Q)$) a imagem de $\sum_{i=0}^{\infty} T^{2i}(V)$ (respectivamente $\sum_{i=0}^{\infty} T^{2i+1}(V)$) em $C(V,Q)$ através de j. Tal decomposição define $C(V,Q)$ como uma $\mathbb{Z}_2$-álgebra graduada, isto é,

i) $C(V,Q) = \sum_{i=0,1} C^i(V,Q)$

ii) Se $x_i \in C^i(V,Q)$, $y_j \in C^j(V,Q)$ então $x_i y_j \in C^k(V,Q)$ $k = (i+j) \bmod 2$.

Os elementos de $C^o(V,Q)$ são chamados pares e formam uma subálgebra de $C(V,Q)$ que denotaremos por $C^+(V,Q)$. Os elementos de $C^1(V,Q)$ são chamados ímpares que denotaremos por $C^-(V,Q)$.

Temos três aplicações definidas em $C(V,Q)$ que são bastante naturais e que serão de grande utilidade no decorrer do texto.

2.4. INVOLUÇÃO PRINCIPAL. Um automorfismo α em $C(V,Q)$ construído a partir de $i_Q : V \longrightarrow C(V,Q)$, $\alpha(x) = -i_Q(x)$, $\forall x \in V$. Desde que $(\alpha(x))^2 = Q(x).1$ podemos por 2.2 definir $\alpha: C(V,Q) \longrightarrow C(V,Q)$. Temos que $\alpha(x) = x$ se $x \in C^+(V,Q)$ e $\alpha(x) = -x$ se $x \in C^-(V,Q)$.

Observe que a graduação em $C(V,Q)$ pode ser definida em termos de α

$$C^i(V,Q) = \{x \in C(V,Q) ; \alpha(x) = (-1)^i x , i=0,1\}.$$

2.5. TRANSPOSIÇÃO. Um antiautomorfismo definido em $C(V,Q)$ definido a partir da transposição definida em $T(V)$. Se $x = x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r}$ em $T^r(V)$, então a aplicação $x \longrightarrow x^t$ dada por $(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r})^t = x_{i_r} \otimes \ldots \otimes x_{i_1}$ define um antiautomorfismo em $T(V)$ que preserva

I_Q. $(x \otimes x - Q(x).1)^t = x \otimes x - Q(x).1$. Assim podemos definir o antiautomorfismo $(\ )^t : C(V,Q) \longrightarrow C(V,Q)$ que denotaremos por $*$.

2.6. CONJUGAÇÃO. Um antiautomorfismo em $C(V,Q)$ obtido através da composição do automorfismo α com a transposição, o qual identificaremos como $x \longrightarrow \bar{x}$ onde $\bar{x} = \alpha(x^*)$.

Para estudarmos algumas propriedades formais da álgebra de Clifford é conveniente descrevê-la em termos de seus geradores. Para tal seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre um corpo K e $B : V \times V \longrightarrow K$ uma forma bilinear simétrica não-degenerada definida em V e, $Q(x) = B(x,x)$ para $x \in V$ sua forma quadrática.

2.7. PROPOSIÇÃO. Se $\{e_i\}$; $i=1,\dots,n$ é uma base de $i_Q(V) \equiv V$, então $\mathbf{1}$ com os produtos $e_{i_1} \dots e_{i_k}$; $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ formam um conjunto de geradores para o espaço linear $C(V,Q)$.

PROVA. Considere $j : T(V) \longrightarrow C(V,Q)$ a projeção definida em 2.1. $j(\varphi) = \varphi(\text{mod } I_Q)$. Seja $\varphi \in T^k(V)$ então $\varphi = \varphi^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$. Em $C(V,Q)$ temos a identificação $x \otimes x \equiv Q(x) \cdot \mathbf{1}$, $\forall x \in V$, logo simetrizando temos $x \otimes y + y \otimes x = 2B(x,y).1$, $\forall x,y \in V$. De fato: $Q(x+y) - Q(x) - Q(y) = x \otimes y + y \otimes x$ e $B(x+y, x+y) - B(x,x) - B(y,y) = 2B(x,y)$. Então:

$$e_{i_j} \otimes e_{i_{j+1}} = -e_{i_{j+1}} \otimes e_{i_j} + 2B(e_{i_j}, e_{i_{j+1}}) \cdot 1$$

e $e_{i_j} \otimes e_{i_j} = Q(e_{i_j}) \cdot \mathbf{1}$ logo, qualquer sequência $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$ pode ser ordenada de modo a que nenhum termo repetido apareça

$$j(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}) = e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} (\mathrm{mod}\ I_Q) = e_{i_1} \ldots e_{i_k} .$$

2.8. COROLÁRIO. Se $\{e_i\}$, $i=1,\ldots,n$ é uma base Q-ortogonal de V então $C(V,Q)$ é gerada por $\mathbf{1}$ e e_i sujeitos às relações

$$e_i e_i = Q(e_i) \cdot \mathbf{1}$$

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad , \quad i \neq j .$$

2.9. A álgebra $C(V,Q)$, $Q \equiv 0$ e ΛV a álgebra exterior de V.

Seja V um espaço vetorial n-dimensional, a álgebra exterior de V, ΛV é definida como a álgebra quociente $\Lambda V = T(V)/_I$ onde I é o ideal bilateral de $T(V)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes x$, $\forall x \in V$. A álgebra ΛV tem uma Z graduação induzida de $T(V)$,

$$\Lambda V = \sum_k \Lambda^k(V) \quad , \quad \Lambda^k(V) = 0 \quad \text{se} \quad k > n ,$$

ΛV é uma álgebra de dimensão finita $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$ e $\dim \Lambda V = 2^n$.

A operação produto em ΛV é denotada por $\wedge$ e é chamada produto exterior. Observe que, se Q, a forma quadrática definida em V é nula, então $C(V,Q) = \Lambda V$, $Q \equiv 0$.

Note que ΛV não é comutativa, mas é comutativa como $\mathbb{Z}_2$-graduada, no sentido que: se $v \in \Lambda^p(V)$ e $w \in \Lambda^q(V)$ então $v \wedge w = (-1)^{p \cdot q}\, w \wedge v$.

Temos um isomorfismo canônico de $C(V,Q)$ e ΛV como espaços vetoriais. Basta associar uma base qualquer de $\Lambda V, \{\mathbf{1}, \bar{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{e}_{i_k}\}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ em ΛV ao conjunto de geradores $\{1, e_{i_1} \ldots e_{i_k}\}$ em $C(V,Q)$, assim $\dim C(V,Q) = 2^n$ e $\{1, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ é uma base de $C(V,Q)$.

I.3. CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD REAIS

Se V é um espaço vetorial real n-dimensional munido de um produto interno (forma bilinear simétrica não degenerada), $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V tal que $B(e_i, e_i) = Q(e_i) = \pm 1$ e $B(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$.

Como consequência imediata de 2.8 e 2.9 podemos definir

3.1. $\mathbb{R}_{p,q} = C(\mathbb{R}^{p+q}, Q)$ $(p+q = n)$ a álgebra de Clifford sobre o corpo dos reais gerada por $\mathbf{1}$ e pelos e_i's, sujeitos às relações

$$e_i^2 = 1 \quad , \quad i=1,\dots,p$$

$$e_i^2 = -1 \quad , \quad i=p+1,\dots,n$$

$$e_ie_j = -e_je_i \quad , \quad i\neq j \; .$$

Observe que se $v \in \mathbb{R}^{p+q}$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ então $Q(v) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i^2$.

Veremos a seguir que as álgebras de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$ têm uma descrição explícita como álgebras de matrizes sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, reais, complexos ou quatérnios respectivamente.

3.2. PROPOSIÇÃO. i) $\mathbb{R}_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

ii) $\mathbb{R}_{0,1} \simeq \mathbb{C}$

iii) $\mathbb{R}_{1,1} \simeq \mathbb{R}(2)$

iv) $\mathbb{R}_{2,0} \simeq \mathbb{R}(2)$

v) $\mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$

($\mathbb{R}(2)$, matrizes 2×2 reais) .

PROVA. i) $V = \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Se e_1 é uma base de $\mathbb{R}$, $\{1,e_1\}$ com $e_1^2 = 1$ é uma base de $\mathbb{R}_{1,0}$. Definimos o isomorfismo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}_{1,0} &\longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\
1 &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
e_1 &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ii) $V = \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Se e_1 é uma base de $\mathbb{R}$, $\{1, e_1\}$ com $e_1^2 = -1$ é uma base de $\mathbb{R}_{0,1}$. Definimos o isomorfismo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}_{0,1} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
1 &\longrightarrow 1 \\
e_1 &\longrightarrow i
\end{aligned}
$$

iii) $V = \mathbb{R}^2$, $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ temos que $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}_{2,0}$ onde $e_i^2 = 1$, $i = 1,2$ e $e_1 e_2 = -e_2 e_1$. Definimos o isomorfismo

$$\mathbb{R}_{2,0} \longrightarrow \mathbb{R}(2)$$

$$1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1e_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

iv) $V = \mathbb{R}^2$, $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = -\sum_{i=1}^{2} x_i^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ onde $e_i^2 = -1$, $i=1,2$ e $e_1e_2 = -e_2e_1$ é uma base de $\mathbb{R}_{0,2}$. Definimos o isomorfismo

$$\mathbb{R}_{0,2} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$e_1 \longrightarrow i$$

$$e_2 \longrightarrow j$$

$$e_1e_2 \longrightarrow k = ij \ .$$

v) $V = \mathbb{R}^2$, $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 - x_2^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ com $e_1^2 = 1$, $e_2^2 = -1$ e $e_1e_2 = -e_2e_1$ é uma base de $\mathbb{R}_{1,1}$. Definimos o isomorfismo

$$\mathbb{R}_{1,1} \longrightarrow \mathbb{R}(2)$$

$$1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Estes isomorfismos e os teoremas a seguir classificam todas as álgebras de Clifford reais $\mathbb{R}_{p,q}$.

3.3. TEOREMA. Seja $K(n)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre K, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, então

$$\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(m) \simeq \mathbb{R}(m.n) \quad , \forall m,n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} K \simeq K(n) \quad ; K = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{H} \quad \text{e } \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}(2)$$

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(4)$$

3.4. TEOREMA. i) $\mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{R}_{0,n+2}$

ii) $\mathbb{R}_{0,n} \otimes \mathbb{R}_{2,0} \simeq \mathbb{R}_{n+2,0}$

iii) $\mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{R}_{1,1} \simeq \mathbb{R}_{p+1,q+1}$.

PROVA. i) Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+2}\}$ base de $\mathbb{R}^{n+2}$ com o produto interno usual $Q(e_i) = 1$, $i=1,2,\ldots,n+2$. Considere $e_1', \ldots, e_n'$ os geradores básicos de $\mathbb{R}_{n,0}$ com $Q'(e_i') = 1$ para $i=1,\ldots,n$ e e_1'', e_2'' os geradores de $\mathbb{R}_{0,2}$ com $Q''(e_i'') = -1$, $i=1,2$. Defina

$$\phi : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2} \quad \text{por}$$

$$\phi(e_i) = \begin{cases} e_i' \otimes e_1''e_2'' & \text{para } 1 \leq i \leq n \\ 1 \otimes e_{i-n}'' & \text{para } i=n+1,n+2 . \end{cases}$$

Temos que:

$$(\phi(e_i))^2 = (e_i' \otimes e_1''e_2'')(e_i' \otimes e_1''e_2'')$$

$$= (e_i')^2 \otimes e_1''e_2''e_1''e_2''$$

$$= -(e_i')^2 \otimes (e_1'')^2\ (e_2'')^2$$

$$= -Q'(e_i').1 \otimes 1$$

$$= -Q(e_i).1 \otimes 1 \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n\ .$$

Estendendo por linearidade temos $(\phi(x))^2 = Q(x).1 \otimes 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+2}$. Logo pela propriedade universal (2.2), ϕ se estende a $\tilde{\phi} : \mathbb{R}_{0,n+2} \longrightarrow \mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2}$ onde $\mathbb{R}_{0,n+2} = C(\mathbb{R}^{n+2}, \overline{Q})$, $\overline{Q} = -Q$. Como $\tilde{\phi}$ leva um conjunto de geradores de $\mathbb{R}_{0,n+2}$ a um conjunto de geradores de $\mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2}$ e $\dim \mathbb{R}_{0,n+2} = \dim(\mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2})$ temos que $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo.

ii) De modo análogo.

iii) Escolha $\{e_1,\ldots,e_{p+1}, \overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_{q+1}\}$ uma base Q-ortonormal para $\mathbb{R}^{r+s+2}$, onde $Q(e_i) = 1$ para $i=1,\ldots,p+1$ e $Q(\overline{e}_j) = -1$, $j=1,\ldots,q+1$. Sejam $e_1',\ldots,e_p', \overline{e}_1',\ldots,\overline{e}_q'$ e $\overline{e}_1'', \overline{e}_1''$ os geradores de $\mathbb{R}_{p,q}$ e $\mathbb{R}_{1,1}$ respectivamente. Defina $\phi : \mathbb{R}^{p+q+2} \longrightarrow \mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{R}_{1,1}$ por

$$\phi(e_i) = \begin{cases} e_i' \otimes e_1''\bar{e}_1'' & \text{para} \quad 1 \leq i \leq p \\ \\ 1 \otimes e_1'' & \text{para} \quad i = p+1 \end{cases}$$

$$\phi(\bar{e}_j) = \begin{cases} \bar{e}_j \otimes e_1''\bar{e}_1'' & \text{para} \quad 1 \leq j \leq q \\ \\ 1 \otimes \bar{e}_j'' & \text{para} \quad j = q+1 \end{cases}$$

Estendendo por linearidade temos $(\phi(x))^2 = Q(x).1 \otimes 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^{p+q+2}$. Logo pela universalidade ϕ se estende a $\tilde{\phi} : \mathbb{R}_{p+1,q+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{R}_{1,1}$.

3.5. COROLÁRIO (Periodicidade). Para $n \geq 0$, existem isomorfismos

$$\mathbb{R}_{n+8,0} \simeq \mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{8,0}$$

$$\mathbb{R}_{0,n+8} \simeq \mathbb{R}_{0,n} \otimes \mathbb{R}_{0,8}$$

$$\mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{R}_{0,8} \simeq \mathbb{R}_{p,q+8} \qquad \text{onde}$$

$\mathbb{R}_{8,0} \simeq \mathbb{R}_{0,8} \simeq \mathbb{R}(16)$.

Basta usar os isomorfismos de 3.4 repetidas vezes.

3.6. CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD $\mathbb{R}_{p,q}$.

p									
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16)\oplus\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(128)\oplus\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(256)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(64)\oplus\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{C}(128)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(32)\oplus\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{H}(64)$
5	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)\oplus\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{H}(32)\oplus\mathbb{H}(32)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16)\oplus\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4)\oplus\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2)\oplus\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$
1	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)\oplus\mathbb{R}(16)$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8 q

I.4. CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD COMPLEXAS

Se V é um espaço vetorial complexo n-dimensional munido de uma forma bilinear simétrica não degenerada, $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, existe uma base $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ de V tal que $B(e_i,e_i) = \overline{Q}(e_i) = 1$, $\forall i=1,\ldots,n$ e $B(e_i,e_j) = 0$, $i \neq j$.

4.1. DEFINIÇÃO. $\mathbb{C}_n = C(\mathbb{C}^{p+q},\overline{Q})$, $(p+q=n)$ é a álgebra de Clifford sobre o corpo complexo gerada por 1 e pelos e_i's sujeitos às relações

$$e_i^2 = 1 \quad , \forall i=1,\ldots,n$$

$$e_ie_j = -e_je_i \quad , \quad i \neq j$$

Se $v = \sum_{i=1}^{n} z_ie_i \quad \mathbb{C}^{p+q}$ então $\overline{Q}(v) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$.

Se considerarmos $\mathbb{R}_{p,q} = C(\mathbb{R}^{p+q},Q)$, $(p+q=n)$ a álgebra de Clifford real, a complexificação de $\mathbb{R}_{p,q}$ é a álgebra de Clifford (complexa) correspondente à forma quadrática $\overline{Q}$, a complexificada de Q.

4.2. $\mathbb{R}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq C(\mathbb{C}^{p+q},\overline{Q}) = \mathbb{C}_n$.

Observe que se $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simé não degenerada então B estende a uma forma bilinear $B_c : V_c \times V_c \longrightarrow \mathbb{C}$ onde $V_c = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ é a complexificação de V e B_c é a complexificação de B

$$B_c(v_1 \otimes z_1, v_2 \otimes z_2) = B(v_1,v_2) \otimes z_1 z_2 \quad , \forall v_1, v_2 \in V$$

e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Temos $\mathbb{C}_o = C$

$$C_1 = \mathbb{R}_{1,0} \otimes \mathbb{C} \simeq (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

4.3. TEOREMA. i) $\mathbb{C}_2 \simeq \mathbb{C}(2)$

ii) $\mathbb{C}_{n+2} \simeq \mathbb{C}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2)$.

PROVA. Tais isomorfismos decorrem imediatamente de 4.1, 4.2, iii) de 3.2 e ii) de 3.4.

i) $\mathbb{C}(2) \simeq \mathbb{R}_{2,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}(2)$

ii) $\mathbb{C}_{n+2} \simeq \mathbb{R}_{n+2,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}_{0,n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{2,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq$

$\simeq (\mathbb{R}_{0,n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{R}_{2,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2)$.

4.4. CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS $\mathbb{C}_n$

$\mathbb{C}_o = \mathbb{C}$

$\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}(2)$

$\mathbb{C}_3 = \mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$

$\mathbb{C}_4 = \mathbb{C}(4)$

$\mathbb{C}_5 = \mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$

$\mathbb{C}_6 = \mathbb{C}(8)$

$C_7 = \mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$

$C_8 = \mathbb{C}(16)$.

Temos assim que

4.5. Se $n=2r$, $\mathbb{C}_n$ é isomorfa a $\mathbb{C}(2^r)$

Se $n=2r+1$, $\mathbb{C}_n$ é isomorfa a $\mathbb{C}(2^r) \oplus \mathbb{C}(2^r)$.

I.5. ESTRUTURA DAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD E SUAS REPRESENTAÇÕES

5.1. Centro de $C(V,Q)$ é $Z = \{a \in C(V,Q) \; ; a\varphi = \varphi a \; , \; \forall \varphi \in C(V,Q)\}$

Vimos que se V é um espaço vetorial n-dimensional sobre K, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base Q-ortonormal de V, $Q : V \longrightarrow K$ uma forma quadrática não degenerada em V, o sistema 1 e $\{e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ tal que $e_ie_j + e_je_i = 0$, $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq n$ e $e_ie_i = Q(e_i)\cdot 1$ forma uma base de $C(V,Q)$. Como consequência temos:[4].

5.2. $e_{i_1}\ldots e_{i_k} = (-1)^{\sigma} e_{j_1}\ldots e_{j_k}$, $0 \leq k \leq n$ onde σ é o número de inversões na permutação $(j_1,\ldots,j_k)$ de $(i_1,\ldots,i_k)$.

Vamos denotar por $A = \{i_1,\ldots,i_k\}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$,

$0 \leq k \leq n$ e por $e_A = e_{i_1} \ldots e_{i_k}$. Se $k=0$ temos o escalar 1.

Se e_A é um elemento da base de $C(V,Q)$ então $e_A \neq 1$. Assim, $e_A e_j = (-1)^q e_j e_A$ onde $q = k$, se $j \neq i_i$, $\forall i$ ou $q = k-1$, se $j = i_i$ para algum i. Assim, e_j pode ser escolhido anti-comutativo com e_A exceto quando k é ímpar e $k = n$.

5.3. PROPOSIÇÃO. Seja V um espaço vetorial sobre K, ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensão n. Temos

i) se n é par $Z = K$

ii) se n é ímpar $Z = K \oplus Kw$ onde $w = e_1, e_2 \ldots e_n$.

PROVA. Como os escalares comutam com todos os elementos da álgebra temos $K \subset Z$.

Se n é par, vamos mostrar que $Z \subset K$.

Seja $\alpha \in Z$, $\alpha = \Sigma \alpha_A e_A$; $\alpha_A \in K$. Suponha que exista um coeficiente não nulo α_B com B não vazio. Sabemos que existe e_j que anticomuta com e_B , logo

$$\alpha = e_j \alpha e_j^{-1} = \Sigma\ \alpha_A\ e_j e_A e_j^{-1} = \Sigma \pm \alpha_A e_A ,$$

onde, em particular, o sinal menos ocorre quando $A = B$. Isto nos dá duas expressões para α o que é uma contradição pela independência linear dos e_A's. Logo $Z = K$.

Se n é ímpar, $w = e_1 \ldots e_n$ comuta com todo e_j (5.1) e portanto $w \in Z$. Como $w \notin K$ então $Z = K \oplus K.w$.

5.4. PROPOSIÇÃO. Seja V um espaço vetorial real n-dimensional onde $n = p+q$, então se

$$p+q = 2k+1 \ , \ Z(\mathbb{R}_{p,q}) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{se } k+q \text{ é par} \\ \mathbb{C} & \text{se } k+q \text{ é ímpar} \end{cases}$$

PROVA(5). Por 5.3, $Z(\mathbb{R}_{p,q}) = K \oplus Kw$. Observe que

$$w^2 = (e_1 \dots e_p \, e_{p+1} \dots e_n)\,(e_1 \dots e_p \, e_{p+1} \dots e_n) =$$

$$= (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} \dots (-1)\, e_1^2 \dots e_p^2 \, e_{p+1}^2 \dots e_n^2 =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e_1^2 \dots e_p^2 \, e_{p+1}^2 \dots e_n^2 \ .$$

Como $e_i^2 = 1$ para $1 \leq i \leq p$ e $e_i^2 = -1$ para $p+1 \leq i \leq p+q$ temos $w^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^q.1 = (-1)^{k(2k+1)} (-1)^q.1 = (-1)^{k+q}$. Logo, $w^2 = 1$ se $k+q$ é par e

$w^2 = -1$ se $k+q$ é ímpar.

5.5. REPRESENTAÇÃO. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo k e Q uma forma quadrática em V. Seja $K \supseteq k$, um corpo contendo k . Uma K-representação da álgebra de Clifford $C(V,Q)$ é um k-homomorfismo de álgebras

$$\rho : C(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W,W) \quad ,$$

W um espaço vetorial sobre K, chamado espaço de representação de ρ, $\rho(\varphi).w \equiv \varphi.w$, $\varphi \in C(V,Q)$, $w \in W$ tal que

$$\rho(\varphi.\psi) = \rho(\varphi) \circ \rho(\psi) \quad , \quad \varphi,\psi \in C(V,Q) \ .$$

5.6. Uma K-representação $\rho : C(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W,W)$ é dita *redutível* se o espaço W pode ser escrito como uma soma direta não trivial, $W = W_1 \oplus W_2$ tal que $\rho(\varphi).(W_j) \subseteq W_j$, $j=1,2$, $\forall\varphi \in C(V;Q)$. Neste caso, escrevemos $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$; $\rho_j = \rho|_{W_j}$, $j=1,2$. Caso contrário, ρ é *irredutível*.

5.7. Duas representações $\rho_j : C(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W_j,W_j)$, $j=1,2$, são ditas *equivalentes* se existe um isomorfismo K-linear $F : W_1 \longrightarrow W_2$ tal que

$$F \circ \rho_1(\varphi) \circ F^{-1} = \rho_2(\varphi) \quad , \quad \forall\varphi \in C(V,Q) \ .$$

Podemos observar das tabelas de classificação (3.6) e (4.4) das álgebras de Clifford reais e complexas, respectivamente, que todas as álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$ ou $\mathbb{C}_n$ são da forma $K(m)$ ou $K(m) \oplus K(m)$ onde $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ para algum m. Sendo assim, a teoria de representação de tais álgebras é bastante simples.

5.8. TEOREMA. Seja $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, e considere o anel $K(m)$ das $m \times m$ matrizes, como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Então a representação ρ de $K(m)$ no espaço vetorial K^m é, a menos de equivalência, a única representação real de $K(m)$

$$\rho : K(m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K^m, K^m) \quad \text{tal que}$$

$$\rho(A)\cdot v = A\cdot v \ , \quad A \in K(m) \ , \ v \in K^m \ .$$

A álgebra $K(m) \oplus K(m)$ tem exatamente duas classes de representação irredutíveis

$$\rho_1(A_1,A_2) = \rho(A_1) \quad \text{e} \quad \rho_2(A_1,A_2) = \rho(A_2) \quad , \quad A_i \in K(m)$$

$i=1,2$ atuando em K^m .

Em qualquer álgebra A, existem subespaços invariantes sob a ação de produtos de elementos arbitrários da álgebra. Tais subespaços são os ideais de A. Estaremos particularmente interessados em encontrar os ideais minimais das álgebras de Clifford, $\mathbb{R}_{p,q}$ e para tal reveremos alguns conceitos e resultados relacionados na teoria de álgebras semi-simples. Como referência, veja [6].

5.9. IDEAL. Um conjunto I de uma álgebra A diz-se um ideal à *esquerda* de A se $a,b \in I$ então $a \pm b \in I$ e $ax \in I$ para $a \in I$ e $x \in A$. No caso do ideal à *direita* tem-se $xa \in L$ para $a \in L$ e $x \in A$. I e L são ditos ideais *laterais* à direita e à esquerda respectivamente. Um ideal diz-se *minimal* se ele não contém nenhum outro ideal que não seja ele mesmo e o zero. Um ideal de A diz-se *bilateral* se ele é simultaneamente um ideal à direita e à esquerda de A.

5.10. Um elemento $e \neq 0$ de uma álgebra A é idempotente se $e^2 = e$.

5.11. TEOREMA. A álgebra $K(m)$ é uma álgebra simples (i.e. os únicos ideais bilaterais de $K(m)$ são os triviais).

Assim, como temos que toda álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$ ou $\mathbb{C}_n$ são isomorfas às álgebras $K(m)$ ou a $K(m) \oplus K(m)$, temos que $\mathbb{R}_{p,q}$ e $\mathbb{C}_n$ são álgebras simples ou soma direta de álgebras simples (que são semi-simples). Mais precisamente, as álgebras de Clifford são semi-simples. De (3.6) e (4.4) temos

5.12. Se $p+q = n$ é par então $\mathbb{R}_{p,q}$ é simples.

Se $p+q = n$ é ímpar com $p-q \not\equiv 1 \bmod 4$, $\mathbb{R}_{p,q}$ é simples.

Se $p+q = n$ é ímpar com $p-q \equiv 1 \bmod 4$, $\mathbb{R}_{p,q}$ é soma direta de álgebra simples.

5.13. Todo ideal lateral de uma álgebra semi-simples é do tipo $I = A.e$ ou $I = e.A$ onde e é um idempotente de A (sempre existe um idempotente numa álgebra semi-simples).

Considere agora I um ideal à esquerda de A. I é invariante por multiplicação à esquerda por elementos de A. Assim, se considerarmos a aplicação linear $L_g : A \longrightarrow A$ dada por $L_g(x) = gx$, $g,x \in A$, podemos considerar $L_g\big|_I : I \longrightarrow I$ $(L_g\big|_I \equiv L_g)$. Se A é uma álgebra sobre K, $\mathcal{L}_K(I)$ é a álgebra das transformações lineares em I sobre K.

Se impusermos a I a condição que seja minimal e considerarmos $F = \{T \in \mathcal{L}_K(I);\ TL_g = L_gT\ ,\ \forall g \in A\}$, F é uma subálgebra de $\mathcal{L}_K(I)$ e pelo Lema de Schur, F é uma álgebra com divisão.

Neste caso podemos dar a I uma estrutura de espaço vetorial à direita sobre F.

$I \times F \longrightarrow I$, para $\psi \in I$ e $T \in F$ definindo $\psi.T = T(\psi)$ e com isto obtemos o seguinte resultado

5.14. Se A é uma álgebra simples, A é isomorfa a $\mathcal{L}_F(I)$ através da aplicação φ dada por $\varphi(g) = L_g$, $g \in A$.

Desde que $\mathcal{L}_F(I)$ é isomorfa a $F(m)$ onde $m = \dim_F I$ temos

5.15. $A \simeq \mathcal{L}_F(I) \simeq F(m)$, $m = \dim_F I$.

Usando estes resultadps temos que, se I é um ideal minimal de $\mathbb{R}_{p,q}$, $p+q$ é par ou $p-q \not\equiv 1 \bmod 4$ temos que

5.16. $\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathcal{L}_F(I) \simeq F(m)$ onde $m = \dim_F(I)$. Observe que neste caso $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ pois F é uma álgebra com divisão sobre $\mathbb{R}$ (Frobenius (1878)), $F \simeq e\ F(m) e$.

5.17. CONSTRUÇÃO DE UM IDEAL MINIMAL À ESQUERDA DE $\mathbb{R}_{p,q}$ [7] .

Suponha inicialmente que $\mathbb{R}_{p,q}$ seja uma álgebra simples, isto é $p+q = n$ é par ou $p+q = n$ é ímpar com $p-q \not\equiv 1 \pmod 4$.

Se $\mathbb{R}_{p,q}$ é uma álgebra simples então existe um idempotente $\mathbf{e}$. Além disso, se I é um ideal à esquerda de $\mathbb{R}_{p,q}$ então $I = \mathbb{R}_{p,q}e = I_{p,q}$.

Vimos que $\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathcal{L}_F(I_{p,q}) \simeq F(m)$, $m = \dim_F I_{p,q}$.

Se $\dim_F I_{p,q} = 1$ então $\mathbb{R}_{p,q}$ é uma álgebra com divisão , no caso $\mathbb{R}_{0,1} \simeq \mathbb{C}$ e $\mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$.

Suponha $n > 1$. Sejam os 2^n elementos 1 e $e_A = e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_k}$, $1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leq n$ que constituem uma base de $\mathbb{R}_{p,q}$. Existe um idempotente $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}_{p,q}$ e assim podemos decompor a identidade $\mathbf{1}$ de $\mathbb{R}_{p,q}$ em $\mathbf{1} = \mathbf{e} + (\mathbf{1} - \mathbf{e})$. O elemento $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + e_{A_1})$ de $\mathbb{R}_{p,q}$ é idempotente, se e somente se $e_{A_1}^2 = \mathbf{1}$. Assim, se existe tal e_A temos que

$$\mathbb{R}_{p,q}.\mathbf{1} = \mathbb{R}_{p,q}\mathbf{e} \oplus \mathbb{R}_{p,q}(\mathbf{1}-\mathbf{e}) \quad \text{e temos que}$$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{p,q}.\mathbf{e} = 2^n/2$, logo $\dim_F \mathbb{R}_{p,q}\mathbf{e}$ será $2^n/2$, $2^n/2^2$, $2^n/2^3$ se $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ respectivamente. Veja tabela (3.6). Se $\dim_F \mathbb{R}_{p,q}\mathbf{e} = m$ então $I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}\mathbf{e}$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{p,q}$, isto é, $\mathbf{e}$ é um idempotente primitivo, e portanto, e não pode ser decomposto na soma de dois idempotentes, mutuamente ortogonais.

Se $\dim_F \mathbb{R}_{p,q}e > m$, significa que $I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}e$ não é um ideal minimal, ou seja e não é primitivo e então e pode ser fatorado na soma de dois idempotentes ortogonais.

Decomponha $e = ee' + e(1-e')$. Então e será uma soma de idempotentes ortogonais se $(e')^2 = e'$.

Escolha $e' = \frac{1}{2}(1+e_{A_2})$. Assim, $ee' = \frac{1}{2}(1+e_{A_1}).\frac{1}{2}(1+e_A^2)$ é idempotente se e somente se $e_{A_1}^2 = e_{A_2}^2 = 1$ e $e_{A_1}e_{A_2} = e_{A_2}e_{A_1}$. Se existe tal elemento, decompomos $I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}e$ numa soma, $I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}e'e \oplus \mathbb{R}_{p,q}(1-e')e$ e $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_{p,q}e'e = 2^n/_{2^2}$.

Se $\dim_F \mathbb{R}_{p,q}e'e = m$ este é um ideal minimal procurado. O processo é finito pois $\dim_F I_{p,q} = m$ e temos se existe e_{A_i} elementos da base de $\mathbb{R}_{p,q}$ tal que $(e_{A_i}^2) = 1$ e $e_{A_i}e_{A_j} = e_{A_j}e_{A_i}$, $1 \leq i,j \leq k$, o elemento $e = \frac{1}{2}(1+e_{A_1}).\frac{1}{2}(1+e_{A_2}) \ldots \frac{1}{2}(1+e_{A_k})$ é um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{p,q}$, se e somente se $2^n/_{2^k} = m$ se $F = \mathbb{R}$, $2^n/_{2^{k+1}} = m$ se $F = \mathbb{C}$ ou $2^n/_{2^{k+2}} = m$ se $F = \mathbb{H}$.

A existência de tal idempotente primitivo pode ser comprovada para os casos de dimensão baixa e depois usar o isomorfismo (3.5) $\mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{R}_{0,8} \simeq \mathbb{R}_{p,q+8}$.

Na verdade, mostra-se que os elementos $e_{A_1},\ldots,e_{A_k}$ da base canônica de $\mathbb{R}_{p,q}$ tal que $(e_{A_i})^2 = 1$ e $e_{A_i}e_{A_j} = e_{A_j}e_{A_i}$, $1 \leq i,j \leq k$

geram um grupo de ordem $k = q - r_{q-p}$ onde r_i são os números de Radon-Hurwitz, definidos pela fórmula de recorrência $r_{i+8} = r_i + 4$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
r_i	0	1	2	2	3	3	3	3

5.18. Tabela - Números de Radon-Hurwitz.

5.19. Se $\mathbb{R}_{p,q}$ é tal que $p+q = n$ é ímpar com $p-q \equiv 1 \pmod 4$, $\mathbb{R}_{p,q}$ é soma direta de álgebra simples, neste caso,

$$\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathcal{L}_F(I) \oplus \mathcal{L}_F(I) \simeq F(m) \oplus F(m) \quad , \; m = \dim_F I \; .$$

O processo anterior se aplica também a este caso, e o idempotente será $e + \bar{e}$.

I.6. AS SUBÁLGEBRAS PARES $\mathbb{R}^+_{p,q}$

Pode-se observar através da tabela de classificação das álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$ que em geral $\mathbb{R}_{p,q} \not\simeq \mathbb{R}_{q,p}$, entretanto, veremos que $\mathbb{R}^+_{p,q} \simeq \mathbb{R}^+_{q,p}$. Temos então que o sinal da signatura da forma quadrática é irrelevante quando se trata das subálgebras pares.

6.1. PROPOSIÇÃO. $\mathbb{R}^+_{p,q} \simeq \mathbb{R}_{p,q-1}$.

PROVA. Escolha uma base Q-ortogonal $e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_{p+q}$ de $\mathbb{R}^{p+q}$, $p+q = n$ tal que $Q(e_i) = 1$ se $1 \le i \le p$ e $Q(e_i) = -1$ para $p+1 \le i \le p+q$.

Seja $\mathbb{R}^{p+q-1} = [e_i\ ,\ i \neq p+q]$ o subespaço de $\mathbb{R}^{p+q}$ gerado por $\{e_i\}$, $i=1,\dots,p+q-1$. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^{p+q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}_{p,q}$ dada por $f(e_i) = e_i.e_{p+q}$, $i \neq p+q$. Para $x \in \mathbb{R}^{p+q-1}$ temos $x = \sum\limits_{i \neq p+q} x_i e_i$ e portanto $x^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum\limits_{i=p+1}^{p+q-1} x_i^2$. Por linearidade $(f(x))^2 = \sum\limits_{i,j} x_i e_i e_{p+q}.x_j e_j e_{p+q} = \sum x_i x_j e_i e_j$ pois $e_i e_{p+q} = -e_{p+q} e_i$ para $i \neq p+q$ e $e^2_{p+q} = -1$. Logo $(f(x))^2 = x^2 = Q(x).1$. Pela propriedade de universalidade (2.2) f se estende a um homomorfismo de álgebras

$$\tilde{f} : \mathbb{R}_{p,q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}_{p,q} \qquad \text{onde}$$

$\mathbb{R}_{p,q-1} = C(\mathbb{R}^{p+q-1}, Q)$.

Para mostrar que $\tilde{f}$ é um isomorfismo basta checar numa base linear de $\mathbb{R}_{p,q-1}$.

6.2. PROPOSIÇÃO. $\mathbb{R}^{+}_{p,q} \simeq \mathbb{R}_{q,p-1}$.

PROVA. Escolha uma base Q-ortonormal $e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_{p+q}$ de $\mathbb{R}^{p+q}$ tal que $Q(e_i) = 1$ se $1 \le i \le p$ e $Q(e_i) = -1$ se $p+1 \le i \le p+q$.

Seja $\mathbb{R}^{p+q-1} = [e_i \ , \ i\neq 1]$ o subespaço de $\mathbb{R}^{p+q}$ gerado por $\{e_i\}$, $i=2,\ldots,p+q$. Considere a aplicação $f:\mathbb{R}^{p+q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}_{p,q}$ dada por $f(e_i) = e_1 e_i$, $i\neq 1$ e estenda por linearidade. Para $x \in \mathbb{R}^{p+q-1}$ temos $x = \sum_{i=2}^{p+q} x_i e_i$ e portanto $x^2 = \sum_{i=2}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2$

$(f(x))^2 = \sum_{i,j} x_i x_j e_i e_1 e_j e_1 = -\sum_{i,j} x_i x_j e_i e_j$ pois $e_i e_1 = -e_1 e_i$ para $i\neq 1$ e $e_1^2 = 1$. Logo, $(f(x))^2 = -Q(x).1$. Pela propriedade de universalidade (2.2) f se estende a um homomorfismo

$$\tilde{f}:\mathbb{R}_{q,p-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}_{p,q} \quad \text{onde} \quad \mathbb{R}_{q,p-1} = C(\mathbb{R}^{p+q-1}, -Q).$$

6.3. COROLÁRIO. $\mathbb{R}^{+}_{p,q} \simeq \mathbb{R}^{+}_{q,p}$

PROVA. $\mathbb{R}_{p,q-1} \underset{(6.1)}{\simeq} \mathbb{R}^{+}_{p,q} \underset{(6.2)}{\simeq} \mathbb{R}_{q,p-1} \underset{(6.1)}{\simeq} \mathbb{R}^{+}_{q,p}$.

I.7. GRUPO DE CLIFFORD

7.1. GRUPO ORTOGONAL. Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre um corpo K. $B:V\times V \longrightarrow K$ uma forma bilinear simétrica não degenerada e Q sua forma quadrática associada, $Q(v) = B(v,v)$, $v \in V$.

Uma aplicação linear $f:V \longrightarrow V$ é dita ortogonal em relação a Q se $Q(f(v)) = Q(v)$, $\forall v \in V$. Note que f é um automorfismo de V pois B é não degenerada. As aplicações ortogonais formam um grupo chamado grupo ortogonal de Q, que denotaremos por $O(V,Q)$

$$O(V,Q) = \{f : V \longrightarrow V \; ; \; Q(f(v)) = Q(v) \; , \; \forall v \in V\}.$$

Se $f \in O(V,Q)$ então $\det f = \pm 1$.

$$SO(V,Q) = \{f \in O(V,Q) \; ; \; \det f = 1\}.$$

7.2. O GRUPO $C^*(V,Q)$

Sejam V e Q como acima e $C(V,Q)$ a álgebra de Clifford associada a V e Q.

O conjunto dos elementos $x \in C(V,Q)$ tais que existe $x^{-1} \in C(V,Q)$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ é um grupo (não abeliano) sob o produto de Clifford que denotaremos por $C^*(V,Q)$.

Quando V é um espaço n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $C^*(V,Q)$ é um grupo de Lie de dimensão 2^n. A operação definida por $[x,y] = xy - yx$, satisfaz a identidade de Jacobi. Isto mostra que $C(V,Q)$ também possui uma estrutura de álgebra de Lie. Pode-se mostrar [2] que ela é a álgebra de Lie do grupo $C^*(V,Q)$.

O grupo de Lie $C^*(V,Q)$ atua naturalmente como automorfismo de álgebras, pela representação adjunta

$$Ad : C^*(V,Q) \longrightarrow Aut(C(V;Q)) \, , \; Ad_g(x) = g\,x\,g^{-1}$$

$g \in C^*(V,Q)$ e $x \in C(V,Q)$.

No que segue será útil considerarmos a representação twisted adjunta

$$\tilde{A}d : C^*(V,Q) \longrightarrow Aut(C(V,Q)),\ \tilde{A}d_g(x) = \alpha(g)\, x g^{-1}$$

onde α é o automorfismo de $C(V,Q)$ definido em (2.4).

Observe que $\tilde{A}d \equiv Ad$ para $x \in C^+(V,Q)$.

Tendo em vista que o espaço vetorial V pode ser considerado um subespaço linear de $C(V,Q)$, $V \equiv i_Q(V)$ por (2.1) e portanto sofre uma ação de $C^*(V,Q)$. Vamos estudar o subgrupo de $C^*(V,Q)$ que deixa V invariante.

7.3. PROPOSIÇÃO. Se $v \in V$ tal que $Q(v) \neq 0$ então $\tilde{A}d_v(V) = V$. De fato, para todo $w \in V$ tem-se

$$\tilde{A}d_v(w) = w - \frac{2B(v,w)}{Q(v)}\, v\ .$$

PROVA. v é inversível então $v^{-1} = v/_{Q(v)}$ e como $2B(v,w) = vw+wv$ para $w \in V$ temos

$$\tilde{A}d_v(w) = \alpha(v)\, w\, v^{-1} = (-v\, w)\, v^{-1} = -(2B(v,w) - wv)\ v/_{Q(v)} =$$

$$= w - \frac{2B(v,w)}{Q(v)}\, v\ .$$

OBSERVAÇÕES. i) Se B é uma forma bilinear simétrica positiva definida em V então $\tilde{A}d_v$ é exatamente a reflexão em torno do hiperplano ortogonal a v.

ii) Se $v \in V$ tal que $Q(v) \neq 0$, $\tilde{A}d_v$ preserva a forma quadrática Q.

7.4. O GRUPO DE CLIFFORD $\Gamma(V,Q)$ É O SUBGRUPO DE $C^*(V,Q)$ DEFINIDO POR

$$\Gamma(V,Q) = \{g \in C^*(V,Q);\ \tilde{A}d_g(V) = V\}.$$

Observe que $\Gamma(V,Q)$ contém todos os elementos $v \in V$ tais que $Q(v) \neq 0$. $\Gamma(V,Q)$ é o subgrupo de $C^*(V,Q)$ gerado por tais elementos.

Fica claro da definição acima que $\tilde{A}d$ restrita a $\Gamma(V,Q)$ é um homomorfismo de $\Gamma(V,Q)$ no grupo de automorfismos de V

$$\tilde{A}d : \Gamma(V,Q) \longrightarrow Aut(V)\ ;\tilde{A}d_g(v) = \alpha(g)\,vg^{-1}\quad,\ g \in \Gamma(V,Q),$$

$v \in V$. $\tilde{A}d$ é uma representação linear de $\Gamma(V,Q)$.

7.5. PROPOSIÇÃO. Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre um corpo K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e Q uma forma quadrática em V não degenerada. O núcleo de $\tilde{A}d : \Gamma(V,Q) \longrightarrow Aut(V)$ é o grupo multiplicativo K^* dos elementos inversíveis múltiplos de $1 \in C(V,Q)$.

PROVA [3]. Suponha $g \in \operatorname{Ker} \tilde{A}d$, isto é, $g \in C^*(V,Q)$ tal que $\tilde{A}d_g(v) = v$. Então $\alpha(g)v = vg$, $\forall v \in V$. Seja $g = g_o + g_1$, $g_o \in C^+(V,q)$, $g_1 \in C^-(V,q)$, $\alpha(g) = g_o - g_1$ e então $(g_o - g_1)v = v(g_o + g_1)$, assim

$$(7.6) \qquad \begin{cases} g_o v = v g_o \\ \\ g_1 v = -v g_1 \quad , \forall v \in V . \end{cases}$$

Seja $\{v_1,\ldots,v_n\}$ uma base de V com $Q(v_i) \neq 0$, $\forall i$. g_o e g_1 podem ser escritos como polinômios em $v_1,\ldots,v_n$. Podemos escrever $g_o = a_o + v_1 b_1$ onde a_o e b_1 são polinômios envolvendo $v_2,\ldots,v_n$. Aplicando α em g_o concluímos que $a_o \in C^+(V,Q)$ e $b_1 \in C^-(V,Q)$. Fazendo $v = v_1$ em (7.6) vemos que $b_1 = 0$. De fato: como $v_1 g_o = g_o v_1$ temos

$$v_1 a_o + v_1^2 b_1 = a_o v_1 + v_1 b_1 v_1 = v_1 a_o - v_1^2 b_1 \qquad \text{pois} \quad a_o \in C^+(V,Q)$$

e $b_1 \in C^-(V,Q)$.

Logo $v_1^2 b_1 = q(v_1) b_1 = 0$ e então, $b_1 = 0$ e g_o não envolve v_1. Aplicando o mesmo argumento com os outros vetores da base mostra-se que g_o não envolve nenhum deles, e portanto g_o é múltiplo de 1. $g_o = t.1$, $t \in K$.

Pode-se usar o mesmo argumento para $g_1 = a_1 + v_1 b_o$, $a_1 \in C^-(V,Q)$ e $b_o \in C^+(V,Q)$, a_1 e b_o não envolvendo v_1. Da equação $v_1 g_1 = -g_1 v_1$ concluímos que $b_o = 0$. Assim, g_1 não envolve v_1.

Por indução g_1 não envolve $v_2,\dots,v_n$. Como $g_1 \in C^-(V,q)$ temos $g_1 = 0$.

Logo $g = g_o \in K$ e como g é inversível, $g \in K^*$.

7.7. A APLICAÇÃO NORMA. $N : C(V,Q) \longrightarrow C(V,Q)$ definida por $N(x) = \bar{x}\, x = \alpha(x^*)\, x$, $x \in C(V,Q)$, $N(x)$ denominada "norma" de x.

Se $v \in V$, $N(v) = \alpha(v^*)\, v = (-v)\,(v) = -v^2 = -Q(v).1$. Assim $N(v)$ coincide com o quadrado do comprimento de v, $v \in V$ com relação a $\overline{Q} = -Q$.

As aplicações $x \longrightarrow \alpha(x)$ e $x \longrightarrow x^*$ preservam $\Gamma(V,Q)$ e induzem respectivamente um automorfismo e um anti-automorfismo em $\Gamma(V,Q)$.

A aplicação N tem propriedades interessantes quando restrita a $\Gamma(V,Q)$, assim podemos estudar o efeito da ação de $\Gamma(V,Q)$ em V com relação a estrutura métrica de V definida por Q.

7.8. PROPOSIÇÃO. $N : \Gamma(V,Q) \longrightarrow K^*$ é um homomorfismo e $N(\alpha(x)) = N(x)$, $x \in \Gamma(V,Q)$.

PROVA [3]. Vamos mostrar inicialmente que $N(\Gamma(V,Q)) \subset \operatorname{Ker} \widetilde{Ad}$, isto é, $\widetilde{Ad}_{N(x)}(v) = v$, $x \in \Gamma(V,Q)$.

Se $x \in \Gamma(V,Q)$ temos $\alpha(x)\, v\, x^{-1} \in V$ e como o anti-automorfismo transposto é a identidade em V temos:

$$\alpha(x)\ v\ x^{-1} = (\alpha(x)\ v\ x^{-1})^* = (x^{-1})^* v\ \alpha(x)^* .$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Usando tal identidade e o fato de $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$, vamos calcular

$$Ad_{N(x)}(v) = Ad_{\alpha(x^*)\,x}(v) = \alpha(\alpha(x^*)\,x))\ v\ (\alpha(x^*)\,x))^{-1} =$$

$$= x^*(\alpha(x)\ v\ x^{-1})\ \alpha(x^*)^{-1} =$$

$$= x^*.(x^{-1})^*\ v\ \alpha(x^*)\ \alpha(x^*)^{-1} = v\ .$$

Logo, por (7.5). $N(x) = \alpha(x^*)\ x = \overline{x}\ x \in K^*$.

Vamos mostrar agora de N é homomorfismo quando restrita a $\Gamma(V,Q)$

$$N(xy) = \alpha((xy)^*)\ (xy) = \alpha(y^*)\ \alpha(x^*)\ xy =$$

$$= \alpha(y^*)\ N(x)\ y = N(x)\ N(y)\,.$$

E ainda, $N(\alpha(x)) = \alpha(\alpha(x)^*)\ \alpha(x) = x^*\ \alpha(x) = \alpha(N(x)) = N(x)$.

7.9. PROPOSIÇÃO. $\tilde{A}d(\Gamma(V,Q)) \subset O(V,\overline{Q})$.

PROVA. Para $v \in V$ com $Q(v) \neq 0$ temos por (7.4) e (7.8) $N(\tilde{A}d_x(v)) = N(\alpha(x)\ v\ x^{-1}) = N(\alpha(x))\ N(v)\ N(x^{-1}) = N(x)N(v)N(x)^{-1} = N(v)$. Como $N(v) = -Q(v)$, $\forall v \in V$, isto completa a prova, $\overline{Q} = -Q$.

Temos então que a representação $\tilde{A}d$ é um homomorfismo $\tilde{A}d : \Gamma(V,Q) \longrightarrow O(V,\overline{Q})$.

Como $\Gamma(V,Q)$ é gerado pelos vetores $v \in V$ tais que $Q(v) \neq 0$, ele pode ser escrito como

$$\Gamma(V,Q) = \{v_1,\dots,v_r \in C(V,Q) \ ; \ v_1,\dots,v_r \text{ é uma sequência}$$

$$\text{finita de elementos de } V \text{ tais que } Q(v_i) \neq 0, \ \forall i\}.$$

I.8. SUBGRUPOS DO GRUPO DE CLIFFORD

Este é um dos parágrafos mais importantes a ser observado, pois em geral não é feito com o devido cuidado em outros textos.

8.1. Definição: $Pin(V,Q) = \{g \in \Gamma(V,Q) \ ; \ N(g) = \pm 1\}$

Vamos verificar como o grupo $Pin(V,Q)$ está relacionado com o grupo ortogonal $O(V,-Q)$, quando $V = \mathbb{R}^{p+q}$. Denotaremos $Pin(V,Q)$ por $Pin(p,q)$

8.2. TEOREMA: $\widetilde{Ad}\big|_{Pin(p,q)} : Pin(p,q) \longrightarrow O(q,p)$

é sobrejetora com núcleo $\mathbb{Z}_2$.

PROVA: Seja $V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+q}$ e $\{e_i\}$ uma base Q-ortonormal de V, com $Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{p+1=q}^{n} x_i^2$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^N$

A álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$ é gerada por
1, e pelos vetores e_i tais que $e_i^2 = 1 \quad i = 1,\dots p$

$$e_i^2 = -1 \quad i = q,\dots n$$

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad i \neq 0$$

Podemos pensar em $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$, onde em $\mathbb{R}^p$ temos uma forma quadrática positiva e em $\mathbb{R}^q$ temos uma forma quadrática negativa.

Considere $Q\Big|_{\mathbb{R}^p}$, seja e_i uma base de $\mathbb{R}^p$ então $Q(e_i) = 1$ e $N(e_i) = -1$ para $i = 1,\dots p$.

Considere $e_i \in \mathbb{R}^p$ e seja $e_k \in \mathbb{R}^{p+q} \subset \mathbb{R}_{p,q}$

$$\tilde{A}d_{e_k}(e_i) = \alpha(e_k) \cdot e_i \cdot e_k^{-1} = -e_k \cdot e_i \cdot e_k^{-1} = \begin{cases} -e_i & \text{se } k=i \\ e_i & \text{se } k\neq i \end{cases}$$

$\tilde{A}d_{e_k}$ é uma reflexão em torno do hiperplano ortogonal a e_k. Aplicando este argumento a todos os vetores da base de $\mathbb{R}^p$ temos que a esfera

$S^- = \{x \in \mathbb{R}^p \ / \ N(x) = -1\}$ está em $Pin(p,q)$. Para $x \in S^-$

$\tilde{A}d_x : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}$ é uma aplicação ortogonal que preserva uma forma quadrática negativa definida com p sinais negativos. Portanto todas estas reflexões estão em $\tilde{A}d\ (Pin(p,q))$ que são os geradores de $O(o,p)$. Analogamente, se $Q(e_i) = -1$, $i = p+1,\dots, n$ temos $N(e_i) = 1$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^q \ ; \ N(x) = 1\}$ está em $Pin(p,q)$ e para $x \in S$ $\tilde{A}d_x : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}$ é uma aplicação ortogonal que preserva uma forma quadrática positiva definida com q sinais positivos, que são os geradores de $O(q,o)$.

Logo $\tilde{A}d\,(Pin(p,q)) = O(q,p)$.

O núcleo desta aplicação consiste da intersecção $Ker\,\tilde{A}d \cap \{|N(x)| = 1\}$ e portanto consiste dos múltiplos $\lambda.1$ tais que $|N(\lambda.1)| = 1$. Como $\lambda \in \mathbb{R}^*$ temos $N(\lambda.1) = \lambda^2 = 1$ e portanto $\lambda = \pm 1$.

8.3. DEFINIÇÃO: Spin (p,q) é o subgrupo de $Pin(p,q)$ que é levado sobre $SO(q,p)$ através de $\tilde{A}d$.

Os grupos $Pin(p,q)$ e $Spin(p,q)$ são os grupos de recobrimento de $O(q,p)$ e $SO(p,q)$.

Dado $v \in Pin(p,q)$ temos $v = v_1 \ldots v_r$, $v_i \in V$ tal que $Q(v_i) = \pm 1$.

$$\tilde{A}d_{v_1\ldots v_r} = \rho_{v_1} \circ \ldots \circ \rho_{v_r} \quad \text{onde}$$

$\rho_{v_i}(w) = w - \dfrac{2B(w,v_i)}{Q(v_i)} \cdot v_i$, é uma reflexão em torno do hiperplano ortogonal a v_i. Como $SO(q,p)$ é gerado por pares de reflexões temos que

$Spin(p,q) = \{v_1 \ldots v_r \in Pin(p,q)\ ;\ r \text{ é par}\}$, isto mostra que:

8.4. $Spin(p,q) = Pin(p,q) \cap \mathbb{R}^{+}_{p,q}$

Por (8.2) e (8.3) temos:

8.5. $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Pin(p,q) \xrightarrow{\tilde{A}_d} O(q,p) \longrightarrow 1$

8.6. $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin(p,q) \xrightarrow{\tilde{A}_d} SO(q,p) \longrightarrow 1$

sequências exatas para todo (p,q). Além disso, se $(p,q) \neq (1,1)$ este recobrimento duplo de $SO(q,p)$ é não trivial. No caso especial

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin(n) \xrightarrow{\tilde{A}_d} SO(n) \longrightarrow 1 \ , \quad \tilde{A}d$$

representa o recobrimento universal de $SO(n)$ para $n \geq 3$.

OBSERVAÇÃO. $Spin(n) \equiv Spin(n,0) \cong Spin(0,n)$.

PROVA[1],[3]. Para mostrar que este é um recobrimento duplo não trivial, basta mostrar que 1 e -1, que é $\operatorname{Ker} \tilde{A}d|_{Spin(p,q)}$ pode ser conectado por um caminho em $Spin(p,q)$. Escolha vetores ortogonais $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$ $(p+q=n)$ tais que $Q(e_1) = Q(e_2) = \pm 1$. Então $\gamma(t) = \pm(\cos 2t + e_1e_2 \operatorname{sen} 2t) = (e_1 \cos t + e_2 \operatorname{sen} t)(-e_1\cos t + e_2 \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$; $\gamma(0) = 1$ e $\gamma(\pi/2) = -1$.

Como $v_1 = e_1 \cos t + e_2 \operatorname{sen} t$ e $v_2 = -e_1 \cos t + e_2 \operatorname{sen} t$ são tais que $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $N(v_1) = N(v_2) = \pm 1$ e $v_1 v_2 \in \mathbb{R}^+_{p,q}$, temos $\gamma(t)$ um caminho em $Spin(p,q)$.

No caso especial de $Spin(n)$ temos, $SO(n)$ é conexo para $n \geq 2$. Temos ainda que $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ para $n \geq 3$ e como $\operatorname{Ker} \tilde{A}d = \mathbb{Z}_2$ e $\tilde{A}d$ é um recobrimento temos $\pi_1(Spin(n)) = 0$, $n \geq 3$, logo $Spin(n,0)$

é simplesmente conexo para $n \geq 3$.

8.7.[8]. $O(p,q) \cong O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{p+q}$.

$O(p,q)$ tem 4 componentes conexas.

$SO(p,q)$ tem 2 componentes conexas.

8.8. $\mathrm{Spin}(p,q) = \{g \in \Gamma(p,q) \cap \mathbb{R}^{+}_{p,q} = \Gamma^{+}(p,q) \ ; \ N(g) = \pm 1\}$.

Spin(p,q) tem 2 componentes conexas. Seja

8.9. $\mathrm{Spin}^{+}(p,q) = \{g \in \mathrm{Spin}(p,q) \ ; \ N(g) = 1\}$ a componente conexa de Spin(p,q) que contém a identidade. $\mathrm{Spin}^{+}(p,q)$ é subgrupo de Spin(p,q).

Neste caso

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}^{+}(p,q) \xrightarrow{\tilde{A}d} SO^{+}(q,p) \longrightarrow 1$$

$\tilde{A}d$ representa o recobrimento universal de $SO^{+}(q,p)$.

Observe através deste esquema o processo de redução, desde $\mathbb{R}_{p,q}$ até se obter $\mathrm{Spin}^{+}(p,q)$.

8.10. i) $\mathbb{R}_{p,q}$ (álgebra de Clifford)

ii) $\mathbb{R}^{*}_{p,q}$ (grupo dos elementos inversíveis de $\mathbb{R}_{p,q}$)

iii) $\Gamma(p,q)$ (subgrupo de $\mathbb{R}^{*}_{p,q}$ que deixa $\mathbb{R}^{p+q}$ invariante através de $\tilde{A}d_g$, $g \in \Gamma(p,q)$; $\Gamma^+(p,q) = \Gamma(p,q) \cap \mathbb{R}^+_{p,q}$

iv) $N : \Gamma(p,q) \longrightarrow K^*$, $N(g) = \alpha(g^*).g$ (homomorfismo)

v) $Pin(p,q) = Ker|N| = \{g \in \Gamma(p,q) \ ; \ N(g) = \pm 1\}$

vi) $Spin(p,q) = Ker|N|_{\Gamma^+(p,q)}| = \{g \in \Gamma^+(p,q) \ ; \ N(g) \ \pm 1\}$

vii) $Spin^+(p,q) = Ker \ N|_{\Gamma^+(p,q)} = \{g \in \Gamma^+(p,q) ; \ N(g) = 1\}$.

8.11 TEOREMA. $Spin(p,q) \cong Spin(q,p)$.

Decorre do fato de $\mathbb{R}^+_{p,q} \cong \mathbb{R}^+_{q,p}$ (6.3) e portanto $\Gamma^*(p,q) \cong \Gamma^+(q,p)$.

8.12 TEOREMA[9] . $Spin(p,q) = \{g \in \mathbb{R}^+_{p,q} \ ; \ N(g) = \pm 1\}$ para $p + q \leq 4$.

PROVA: (Ref.[9], pag. 256). $Spin(p,q) \subset \mathbb{R}^+_{p,q}$ por definição.

Devemos então mostrar que $\forall g \in \mathbb{R}^+_{p,q}$ tal que $N(g) = \pm 1$, se $x \in \mathbb{R}^{p+q}$, $\tilde{A}d_g(x) \in \mathbb{R}^{p+q}$. $\tilde{A}d_g(x) = \alpha(g).x.g^{-1} = g\,xg^{-1}$ pois $g \in \mathbb{R}^+_{p,q}$. Devemos mostrar que $y = g\,xg^{-1} \in \mathbb{R}^{p+q}$, $\forall x \in \mathbb{R}^{p+q}$. Desde que $g \in \mathbb{R}^+_{p,q}$, temos $y \in \mathbb{R}^-_{p,q}$. Considere $\{e_i\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}_{p,q}$, $i = 1,\ldots,4$

$$y = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i + \sum_{i,j,k=1}^{4} \beta_{ijk} e_i e_j e_k$$

$$\overline{y} = \alpha(y^*) = \alpha((g\, xg^{-1})^*) = \alpha((g^{-1})^* xg^*) = \alpha(g^{-1})^* \alpha(x).\alpha(g^*) =$$

$$= -g\, xg^{-1} = -y \quad \text{pois} \quad g \in \mathbb{R}^+_{p,q} \quad \text{e} \quad g^{-1} = \pm\, g^* .$$

Como $\overline{e}_i = -e_i$, $(\overline{e_i e_j e_k}) = e_i e_j e_k$ então $\beta_{ijk} = 0$, $\forall i,j,k$.

8.13. COROLÁRIO. $Spin^+(p,q) = \{x \in \mathbb{R}^+_{p,q} : N(g) = 1\}$ para $p+q\leq 4$.

CAPÍTULO II

SPINORES

II.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo tem dois objetivos importantes. Um deles é relacionar as diferentes definições e representações de "spinores" que aparecem na literatura, o outro, é explorar a estrutura destes "espaços spinoriais", de modo a conseguirmos no capítulo III, condições para definirmos um "fibrado spinorial" sobre uma variedade espaço-tempo.

Apresentamos aqui três tipos de definições de spinores; spinor co-variante (E. Cartan), spinor algébrico (M. Riez) e o spinor operatorial (D. Hestenes). Trabalhamos basicamente com os spinores algébricos, que são elementos de ideais minimais, das álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$. Introduzimos o conceito de "métrica spinorial" no espaço dos ideais, com objetivo e técnicas diferentes das apresentadas por Lounesto [7] e provamos que para $p+q \leq 4$, existe, do ponto de vista de teoria de grupos, uma equivalência entre estes três tipos de spinores.

Ainda neste capítulo, tratamos com detalhes os casos físicos mais importantes, a saber; spinores de Pauli, Dirac e os spinores pontuados e não pontuados e conseguimos obter resultados interessantes e originais com relação as suas representações.

II.2. TIPOS DE SPINORES E FORMULAÇÕES FÍSICAS

2.1. SPINOR COVARIANTE, (E. Cartan [10], R. Brauer e H. Weyl [11]. Um C-*spinor* é um conjunto de variáveis complexas definido por suas transformações sob um particular grupo spin.

2.2. SPINOR ALGÉBRICO, (M. Riez [4]). Um a-*spinor* é definido como um elemento de um ideal lateral minimal numa álgebra de Clifford apropriada.

2.3. SPINOR OPERATORIAL, (D. Hestenes [12,13,14,15]. Um o-*spinor* é um número de Clifford especial numa álgebra de Clifford apropriada.

Os físicos usam as seguintes espécies de C-spinores:

2.4. C-SPINORES DE PAULI, são vetores de um espaço vetorial 2-dimensional complexo $\mathbb{C}^2$, munido de uma métrica spinorial

$$\beta_p : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \; ; \; \beta_p(\psi,\varphi) = \bar{\psi}_1\varphi_1 + \bar{\varphi}_2\psi_2$$

com $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$; $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$; $\psi_i, \varphi_i \in \mathbb{C}$ onde $\bar{\psi}_1$ significa o complexo conjugado de ψ_1. Observe que se definirmos $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$ (a transposta conjugada de ψ) temos $\beta_p(\psi,\varphi) = \bar{\psi}\,\varphi$.

Tal "métrica spinorial" é invariante sob a ação do grupo

$SU(2) = \{A \in \mathbb{C}^2 \; ; \; A\bar{A}^t = I \; , \; \det A = 1\}$, isto é, se $u \in SU(2)$ então $\beta_p(u\psi, u\varphi) = \beta_p(\psi,\varphi)$, $\forall \psi,\varphi \in \mathbb{C}^2$. Como é bem conhecido, os c-spinores de Pauli carregam a representação fundamental irredutível $D^{1/2}$ de $SU(2)$ [16,17].

2.5. C-SPINORES NÃO PONTUADOS E PONTUADOS de duas componentes (introduzidos por Van der Waerden [18]) que são respectivamente os vetores de dois espaços vetoriais complexos $\mathbb{C}^2$ e $\dot{\mathbb{C}}^2$. Em ambos os casos são definidas "métricas spinoriais" β, $\dot{\beta}$ tais que

$$\beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \; , \; \beta(\psi,\varphi) = \psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1$$

$$\dot{\beta} : \dot{\mathbb{C}}^2 \times \dot{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \; , \; \dot{\beta}(\dot{\psi},\dot{\varphi}) = \dot{\psi}_1\dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}_2\dot{\varphi}_1$$

com $\psi,\varphi,\dot{\psi},\dot{\varphi}$ como em (2.4). Observe que se definirmos $\psi^t(\dot{\psi}^t)$ como a transposta de $\psi(\dot{\psi})$ podemos escrever

$$\beta(\psi,\varphi) = \psi^t C\varphi$$

$$\dot{\beta}(\dot{\psi},\dot{\varphi}) = \dot{\psi}^t C\varphi \quad \text{onde}$$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz de $\beta(\dot{\beta})$ na base canônica de $\mathbb{C}^2$ $(\dot{\mathbb{C}}^2)$ [19,20].

Tais "métricas spinoriais" são invariantes sob a ação do grupo $SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}(2) \; ; \; \det A = 1\}$, isto é, se $u \in SL(2,\mathbb{C})$ então $\beta(u\psi,u\varphi) = \beta(\psi,\varphi)$, $\forall\psi,\varphi \in \mathbb{C}^2$ e $\dot{\beta}((u^*)^{-1}\dot{\psi},(u^*)^{-1}\dot{\varphi}) = \dot{\beta}(\dot{\psi},\dot{\varphi})$, $\forall\dot{\psi},\dot{\varphi} \in \dot{\mathbb{C}}^2$. As matrizes u e $(u^*)^{-1}$ são as representações (não equivalentes), $D^{(1/2,0)}$ e $D^{(0,1/2)}$ do grupo $SL(2,\mathbb{C})$.

2.6. C-SPINORES DE DIRAC são vetores de um espaço vetorial complexo 4-dimensional $\mathbb{C}^4$ munido de uma "métrica spinorial" [19,20]

$$\beta_D : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C} \ , \quad \beta_D(\psi_D,\varphi_D) = \psi_D^t B \varphi_D$$

onde um c-spinor de Dirac $\psi_D(\varphi_D)$ é definido como $\psi = \binom{\xi}{\eta} \in \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus (\dot{\mathbb{C}}^2)^*$, onde $\xi \in \mathbb{C}^2$ e $\eta = \dot{\beta}(\dot{\eta}, \ ) \in (\dot{\mathbb{C}}^2)^*$ o dual de $\dot{\mathbb{C}}^2$. Na base canônica de $\mathbb{C}^4$, obtida através da base canônica de $\mathbb{C}^2$ e $(\dot{\mathbb{C}}^2)^*$, a matriz B é a matriz de β_D , $B = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ onde C é a matriz de (2.5).

É conhecido que os c-spinores de Dirac carregam a representação $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ de $SL(2,\mathbb{C})$. Alguns autores, como na referência [19], chamam tais objetos $\psi \in \mathbb{C}^4$ de bi-spinores.

III.3. SPINORES ALGÉBRICOS DE $\mathbb{R}_{p,q}$ E A MÉTRICA SPINORIAL

No capítulo anterior, vimos que para $\mathbb{R}_{p,q}$ simples,

$$\mathbb{R}_{p,q} \overset{\varphi}{\simeq} \mathcal{L}_F(I_{p,q}) \simeq F(m) \text{ onde } m = \dim_F I_{p,q} \ .$$

O isomorfismo $\varphi : \mathbb{R}_{p,q} \longrightarrow \mathcal{L}_F(I_{p,q})$ é dado por

$\varphi(g).\psi = g\psi$, $g \in \mathbb{R}_{p,q}$ e $\psi \in I_{p,q}$.

Observe que φ é uma representação fiel de $\mathbb{R}_{p,q}$ e desde que $I_{p,q}$ é um espaço vetorial sobre F, se considerarmos uma base de $I_{p,q}$, a um elemento idempotente minimal e de $\mathbb{R}_{p,q}$ estará correspondendo um idempotente minimal de F(m), a saber, uma matriz e_{ii} com 1 na posição ii (para algum i) e zero nas outras. Assim, estamos identificando os ideais minimais à esquerda $\mathbb{R}_{p,q}$ com matrizes-coluna de F(m).

O grupo Spin(p,q) $\subset \mathbb{R}^+_{p,q} \subset \mathbb{R}_{p,q}$. Assim, para $g \in$ Spin(p,q) temos $gI_{p,q} \subseteq I_{p,q}$ e então podemos considerar os elementos do grupo Spin(p,q) como um conjunto de operadores atuando em $I_{p,q}$.

3.1. SPINORES ALGÉBRICOS. Dada uma álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$, chamamos de a-spinores aos elementos de um ideal minimal à esquerda $\mathbb{R}_{p,q}e$ ou $\mathbb{R}^+_{p,q}e'$ onde e e e' são idempotentes primitivos de $\mathbb{R}_{p,q}$ com e' idempotente minimal de $\mathbb{R}^+_{p,q}$.

3.2. REPRESENTAÇÕES SPINORIAIS. Os ideais $I_{p,q}$ podem ser vistos como espaços de representação do grupo Spin(p,q) e chamamos $\varphi = \varphi|_{\mathrm{Spin}(p,q)}$ de representação spinorial do grupo Spin(p,q).

3.3. PRODUTO ESCALAR DOS SPINORES - MÉTRICA SPINORIAL

Vimos em (I.5.14) que podemos definir em $I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}e$, e um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{p,q}$, uma ação à direita de $F \simeq e\mathbb{R}_{p,q}e$ sobre $I_{p,q}$; $I_{p,q} \times F \longrightarrow I_{p,q}$ ao par $(\psi,\alpha) \in I_{p,q} \times F$ associa $\psi\alpha \in I_{p,q}$ onde $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, dependendo de $p-q \equiv 0,1,2$ (mod 8), $p-q \equiv 3,7$ (mod 8) ou $p-q \equiv 4,5,6$ (mod 8) respectivamente. (Veja I.3.6). Deste modo $I_{p,q}$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial à direita sobre F, cujos elementos são os "escalares" do espaço vetorial $I_{p,q}$.

Isto nos sugere a possibilidade de definir um "produto escalar" natural em $I_{p,q}$ ou seja uma aplicação bilinear não degenerada $\Gamma : I_{p,q} \times I_{p,q} \longrightarrow F$. Para tal fim, observe que se f e g são F-endomorfismos em $\mathbb{R}_{p,q}$, podemos definir uma aplicação bilinear Γ em $\mathbb{R}_{p,q}$ usando f e g. Simplesmente tome $\Gamma(\psi,\varphi) = f(\psi).g(\varphi)$, $\psi,\varphi \in \mathbb{R}_{p,q}$. Considerando que $I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}e$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre F podemos tomar a restrição de Γ a $I_{p,q}$ e fazer a seguinte pergunta:

3.4. Para $\psi,\varphi \in I$ quando temos $\Gamma(\psi,\varphi) \in F$?

Como vimos em (I.2.4, I.2.5 e I.2.6) temos três isomorfismos naturais definidos em $\mathbb{R}_{p,q}$, involução principal, transposição e conjugação. Combinando estes três isomorfismos com a aplicação identidade podemos definir as seguintes aplicações bilineares

$$\Gamma_i : I_{p,q} \times I_{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}_{p,q} \quad , \quad i=1,2,3$$

$$\Gamma_1(\psi,\varphi) = \alpha(\psi)\,\varphi \ ; \ \Gamma_2(\psi,\varphi) = \psi^*\varphi \ ; \ \Gamma_3(\psi,\varphi) = \alpha(\psi^*)\,\varphi = \bar{\psi}\,\varphi \,.$$

Como observamos anteriormente, a involução é um automorfismo, enquanto que a reversão e a conjugação são anti-automorfismos. Um automorfismo (antiautomorfismo), transforma um elemento de um ideal minimal a esquerda em um elemento de um ideal minimal à esquerda (minimal à direita).

Para ver a validade desta afirmação, basta observar que a imagem de um idempotente primitivo sob um isomorfismo é um idempotente primitivo e que se $\psi \in I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}e$, então $\psi = xe$ com $x \in \mathbb{R}_{p,q}$ e portanto:

3.5. $\alpha(\psi) = \alpha(xe) = \alpha(x)\alpha(e) \Longrightarrow \alpha(\psi) \in I'_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}\alpha(e)$

$$\psi^* = (xe)^* = e^*x^* \Longrightarrow \psi^* \in I^*_{p,q} = e^*\mathbb{R}_{p,q}$$

$$\bar{\psi} = (\overline{xe}) = \bar{e}\,\bar{x} \Longrightarrow \bar{\psi} \in \bar{I}_{p,q} = \bar{e}\,\mathbb{R}_{p,q} .$$

Usando os isomorfismos $\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathcal{L}_F(I_{p,q}) \simeq F(m)$, $m = \dim_F(I_{p,q})$ ($\mathbb{R}_{p,q}$ simples), identificamos os elementos do ideal minimal $I_{p,q}$ com matrizes coluna de $F(m)$. Então se $\psi \in I_{p,q}$ tem uma representação como uma matriz coluna de $F(m)$ então ψ^* e $\bar{\psi}$ tem representações como matriz linha de $F(m)$ e assim obtemos que $\psi^*\varphi$ e $\bar{\psi}\varphi$ são elementos de F.

Identificamos os escalares da estrutura vetorial de $I_{p,q}$ com múltiplos de

$$3.6. \quad e \equiv 1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$, isto é, como matrizes em F(m) múltiplos da matriz na equação (3.6).

Através de um isomorfismo de $\mathbb{R}_{p,q}$ (mutiplicação por um elemento inversível conveniente $u \in \mathbb{R}_{p,q}$) podemos transportar $\psi^* \varphi$ ou $\bar{\psi} \varphi$ para a posição (1,1) na operação matricial destas operações.

Concluímos então que os "produtos escalares naturais" em $I_{p,q}$ são da forma

$$\beta_i : I_{p,q} \times I_{p,q} \longrightarrow F \quad , \quad i=1,2$$

$$\beta_1(\psi,\varphi) = u\psi^*\varphi \quad \text{e} \quad \beta_2(\psi,\varphi) = u'\bar{\psi}\varphi \quad , \forall \psi,\varphi \in I_{p,q} \quad \text{e} \quad u,u' \in \mathbb{R}^*_{p,q}.$$

3.7. β_i é não degenerada , i=1,2.

De fato: $\beta_1(\psi,\varphi) = 0 \Longrightarrow u\psi^*\varphi = 0 \Longrightarrow \psi^* = 0$ ou $\varphi = 0$ (u é inversível) e F é uma álgebra de divisão $\Longrightarrow$ $\psi = 0$ ou $\varphi = 0$ (a transposição é isomorfismo).

Analogamente: $\beta_2(\psi,\varphi) = 0 \Longrightarrow \psi = 0$ ou $\varphi = 0$.

Lounesto [7] obtém os produtos β_1 e β_2 usando outra argumentação, e imediatamente procede à classificação dos grupos dos automorfismos destes produtos i.e., os homomorfismos de F-modulos à direita, $I_{p,q} \longrightarrow I_{p,q}$, $\psi \longrightarrow S.$, $S \in \mathbb{R}_{p,q}$ deixam tais produtos invariantes, isto é, para os quais $\beta_i(S\psi,S\varphi) = \beta_i(\psi,\varphi)$, $\forall\psi,\varphi \in I_{p,q}.e$, $i=1,2$. Temos então que $G_1 = \{S \in \mathbb{R}_{p,q}\ ;\ S^*S = 1\}$ e $G_2 = \{S \in \mathbb{R}_{p,q}\ ;\ \bar{S}S = 1\}$ respectivamente são tais grupos.

Em seu artigo não aparece qualquer relacionamento dos grupos Spin(p,q) com os grupos G_1 e G_2 e como consequência não se tem uma idéia clara de como relacionar com as álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$ (para apropriados p e q) os diferentes tipos de spinores descritos em (2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 de II).

Para tal, considere os seguintes subgrupos de G_1 e G_2 a saber:

$$G_1^+ = \{S \in \mathbb{R}^+_{p,q}\ ;\ S^*S = 1\} \quad \text{e} \quad G_2^+ = \{S \in \mathbb{R}^+_{p,q}\ ;\ \bar{S}S = 1\}$$

respectivamente, e portanto por (I.9.10) temos

$$G_1^+ = G_2^+ = \mathrm{Spin}^+(p,q) \quad \text{para} \quad p+q \leq 4 \ .$$

Este é o motivo de chamarmos β_1 e β_2 de "métricas spinoriais".

Além do mais, as operações + e * são anti-involuções na álgebra e portanto são determinadas por sua restrição a qualquer subconjunto que gera a álgebra [9], e assim independe da representação da subálgebra par.

II.4. REPRESENTAÇÃO DOS c-SPINORES de Pauli, dos c-spinores bidimensionais pontuados e não pontuados e dos c-spinores de Dirac por spinores algébricos.

Em primeiro lugar, vamos analisar como estão relacionadas as seguintes álgebras

$\mathbb{R}_{0,2}$ = Álgebra dos Quatérnios

$\mathbb{R}_{3,0}$ = Álgebra de Pauli

$\mathbb{R}_{1,3}$ = Álgebra de Minkowski

$\mathbb{R}_{3,1}$ = Álgebra de Majorana

$\mathbb{R}_{4,1}$ = Álgebra de Dirac.

Temos de (I.36) que:

$$\mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$$

$$\mathbb{R}_{3,0} \simeq \mathbb{C}(2)$$

$$\mathbb{R}_{1,3} \simeq \mathbb{H}(2)$$

$$\mathbb{R}_{3,1} \simeq \mathbb{R}(4)$$

$$\mathbb{R}_{4,1} \simeq \mathbb{C}(4).$$

Temos ainda de (6.1, 6.2 e 6.3 de I) que

$$\mathbb{R}^{+}_{3,0} \simeq \mathbb{R}_{0,2}$$

$$\mathbb{R}_{3,0} \simeq \mathbb{R}^{+}_{1,3} \simeq \mathbb{R}^{+}_{3,1}$$

$$\mathbb{R}^{+}_{4,1} \simeq \mathbb{R}_{1,3}$$

Assim,

4.1. $\mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{R}^+_{3,0} \subset \mathbb{R}_{3,0} \simeq \mathbb{R}^+_{1,3} \subset \mathbb{R}_{1,3} \simeq \mathbb{R}^+_{4,1} \subset \mathbb{R}_{4,1}$.

4.2. a-SPINORES DE PAULI E O GRUPO SU(2).

A álgebra de Pauli $\mathbb{R}_{3,0} \simeq \mathbb{C}(2)$ é gerada por 1 e σ_i , $i = 1,2,3$ sujeita as condições $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$, $\delta_{ij} = +1$ ou $\delta_{ij} = 0$, dependendo de $i=j$ ou $i \neq j$, respectivamente.

O elemento $e_{30} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)$ é um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{3,0}$ pois temos $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_{3,0}\, e_{30}) = \dim \mathbb{R}_{3,0}/2 = 2^3/2 = 2^2$ e assim, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{R}_{3,0}\, e_{30} = 2$ e assim $I_{3,0} = \mathbb{R}_{3,0}e_{30}$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{3,0}$. Temos que $\{e_{30},\sigma_1 e_{30},\sigma_2 e_{30},\sigma_1\sigma_2 e_{30}\}$ é uma base real de $I_{3,0}$. $\mathbb{C} \simeq e_{30}\mathbb{R}_{3,0}e_{30}$ cuja base é $\{e_{30},\sigma_1\sigma_2 e_{30}\}$ e assim $\alpha = \{e_{30},\sigma_1 e_{30}\}$ é uma base spinorial para $I_{3,0} \equiv I_p = \mathbb{R}_{3,0}e_{30}$.

Usando o isomorfismo $\mathbb{R}_{3,0} \overset{\varphi}{\simeq} \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(I_p)$ (III.3), $\varphi(u).\psi = u\,\psi$, $u \in \mathbb{R}_{3,0}$, $\psi \in I_p$ e identificando

$$e_{30} \equiv 1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \sigma_1\sigma_2 e_{30} \equiv i \equiv \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \varphi(\sigma_i) \equiv \sigma_i ,$$ temos as seguintes representações para σ_i ,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ que são as

chamadas matrizes de Pauli.

Se $x \in \mathbb{R}_{3,0}$ temos as seguintes representações para x, $\alpha(x)$, x^* e $\bar{x}$, a saber

$$x = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} ; \ \alpha(x) = \begin{bmatrix} \bar{z}_4 & -\bar{z}_3 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x^* = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} z_4 & -z_2 \\ -z_3 & z_1 \end{bmatrix} .$$

Mostraremos a seguir que:

4.3. Os elementos de $I_p = \mathbb{R}_{3,0}e_{30}$ (a-spinor de Pauli) são representações dos c-spinores de Pauli (II.2.1) na álgebra $\mathbb{R}_{3,0}$

Considere $\beta_1 : I_p \times I_p \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\beta_1(\psi,\varphi) = \psi^* \varphi$

para $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{bmatrix}$ e $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_2 & 0 \end{bmatrix}$ temos $\beta_1(\psi,\varphi) = \bar{\psi}_1\varphi_1 + \bar{\psi}_2\varphi_2$ que é um produto hermitiano, cuja matriz na base α é

$$[\beta]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

Assim, se $x \in \mathbb{R}^+_{3,0}$, $N(x) = \bar{x}x = \det x.I_2$ e portanto $N(x) = 1 \Longleftrightarrow \det x = 1$.

Logo, $SU(2) = \{S \in \mathbb{R}^+_{3,0}\ ;\ \beta(S\psi, S\varphi) = \beta(\psi,\varphi)\} = \{S \in \mathbb{R}^+_{3,0}\ ;\ \bar{S}S = 1\}$ e por (I.9.9) temos

$$SU(2) = \mathrm{Spin}^+(3,0) = \mathrm{Spin}(3) \quad \text{e fica provado 4.3.}$$

4.4. OS a-SPINORES NÃO PONTUADOS E PONTUADOS DE DUAS COMPONENTES E O GRUPO $SL(2,\mathbb{C})$.

A álgebra $\mathbb{R}_{1,3}$ é gerada por 1 e pelos e_i, $e_i \in \mathbb{R}^4$, $i=0,1,2,3$ tal que $e_o^2 = 1$ e $e_i^2 = -1$. Considere o isomorfismo $\mathbb{R}_{3,0} \overset{f}{\simeq} \mathbb{R}^+_{1,3}$, onde f é a extensão linear de $\tilde{f}(\sigma_i) = e_i e_o$, $i \neq 0$, $i=1,2,3$ (I.6.1) e $\sigma_i \in \mathbb{R}^3$ como em (4.3). Desde que $e_{30} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)$ é um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{3,0}$, $f(e_{30}) = \frac{1}{2}(1 + e_3 e_o)$ é um idempotente primitivo de $\mathbb{R}^+_{1,3}$. Além disso, como $\mathbb{R}_{1,3} \simeq \mathbb{H}(2)$, $\mathbf{e} = f(e_{30})$ é também um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{1,3}$ pois, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{1,3}\mathbf{e} = 2^4/2$ e portanto $\dim_{\mathbb{H}} \mathbb{R}_{1,3}\mathbf{e} = 2$ (Veja I.5.17). Temos assim que:

4.5. $I_D = \mathbb{R}_{1,3}\mathbf{e}$ é um espaço bi-dimensional quaterniônico à direita:

$$I_D = \phi_1 e + \phi_2 e_o e + \phi_3 e_1 e + \phi_4 e_2 e + \phi_5 e_o e_1 e + \phi_6 e_o e_2 e + \\ + \phi_7 e_1 e_2 e + \phi_8 e_o e_1 e_2 e\ ,\ \phi_i \in \mathbb{R},\ i=1,\ldots,8\ .$$

Temos $\mathbb{H} \simeq e\mathbb{R}_{1,3}e \simeq [e, e_1e, e_2e, e_1e_2e] = [1, i, j, k]$, segue

$$I_D = e(\phi_1 e + \phi_3 e_1 e + \phi_4 e_2 e + \phi_7 e_1 e_2 e) +$$

$$+ e_o e_1 e(\phi_5 e - \phi_2 e_1 e + \phi_8 e_2 e - \phi_6 e_1 e_2 e) \ .$$ Portanto:

4.6. $I_D = e\psi_1 + e_o e_1 e \psi_2 \ ; \quad \psi_i \in \mathbb{H} \quad , \quad i = 1,2 \ .$

Tomando agora $I_D^+ = \mathbb{R}_{1,3}^+ e$ temos que

$$I_D^+ = e(\phi_1 e + \phi_7 e_1 e_2 e) + e_o e_1 e(\phi_5 e + \phi_6 e_1 e_2 e) \ ,$$ então:

4.7. $I_D^+ = e\psi_1 + e_o e_1 e \psi_2 \quad ; \quad \psi_i \in \mathbb{C} \simeq [e, e_1 e_2 e] \subset \mathbb{H} \ .$

4.8. $\alpha = \{e, e_o e_1 e\}$ é uma base quaterniônica para I_D e uma base complexa para $I_D^+ \subset I_D$.

Considerando agora o isomorfismo

$$\sigma : \mathbb{R}_{1,3} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(I_D) \quad \text{tal que, a cada} \quad u \in \mathbb{R}_{1,3}$$

associa $\sigma(u) : I_D \longrightarrow I_D$ com $\sigma(u).\psi = u\psi$, $\psi \in I_D$, temos a seguinte representação de $e_i \in \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}_{1,3}$, $i=0,1,2,3$, $e_i \equiv \sigma(e_i)$ em relação a base de α :

4.9. $e_o = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$; $e_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$; $e_2 = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$;

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} .$$

Portanto se $u \in \mathbb{R}^+_{1,3}$ temos $u = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}$,

$\bar{u} = u^* = \begin{bmatrix} z_4 & -z_2 \\ -z_3 & z_1 \end{bmatrix}$, $z_i \in \mathbb{C}$, $i=1,2,3,4$.

Observe que $\varphi\big|_{\mathbb{R}^+_{1,3}} : \mathbb{R}^+_{1,3} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(I^+_D)$ é um isomorfismo.

Por (3.8), definimos a métrica spinorial

4.10. $\beta : I^+_D \times I^+_D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\beta(\psi,\varphi) = e_o e_1 \bar{\psi}\varphi$ e temos $\beta(\psi,\varphi) = \psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1$ cuja matriz de β na base α é:

$[\beta]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e então, se $u \in \mathbb{R}^+_{1,3}$

4.11. $\beta(u.\psi, u.\varphi) = \beta(\psi,\varphi) \Longleftrightarrow \bar{u}u = I_2 \Longleftrightarrow \det u = 1 \Longleftrightarrow u \in SL(2,\mathbb{C})$ $\Longleftrightarrow u \in Spin^+(1,3)$.

Deste modo, os elementos de $I^+_D = \mathbb{R}^+_{1,3}e$ (*os a-spinores não pontuados*) podem ser vistos como uma representação dos c-*spinores* *não pontuados* de duas componentes, um espaço de representação de $\mathbb{R}^+_{1,3}$. Este é o espaço da representação $D^{(1/2,0)}$ de $SL(2,\mathbb{C})$.

4.12. OS a-SPINORES PONTUADOS podem ser vistos da seguinte maneira:

Se e é um idempotente primitivo de $\mathbb{R}^+_{1,3}$ então $\bar{e} = 1 - e$ também é. Assim, podemos considerar o espaço $\bar{I}^+_D = \bar{e}\mathbb{R}^+_{1,3}$ que é um ideal minimal à direita de $\mathbb{R}^+_{1,3}$ e portanto um espaço de representação de $\mathbb{R}^+_{1,3}$. Podemos obter $\bar{I}^+_D$ através de I^+_D usando a operação conjugação. Assim, se $\alpha = \{e, e_o e_1 e\}$ temos $\bar{\alpha} = \{e, \bar{e} e_1 e_o\}$ uma base de $\bar{e}\mathbb{R}^+_{1,3}$ onde

$$\bar{e} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad \bar{e} e_1 e_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\overset{o}{\psi} \in \bar{e}\mathbb{R}^+_{1,3}$ então $\overset{o}{\psi} = \psi_1 \bar{e} + \psi_2 \bar{e} e_1 e_o$; $\psi_i \in \mathbb{C}$ (observe que $\bar{e}\mathbb{R}^+_{1,3}$ tem uma estrutura de espaço vetorial à esquerda sobre $\mathbb{C}$), assim,

$$\overset{o}{\psi} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\psi_2 & \psi_1 \end{bmatrix} = \bar{\psi} = \psi^* \ , \ \psi \in \mathbb{R}^+_{1,3}\, e .$$

Definimos a "métrica spinorial"

$$\beta : \bar{I}^+_D \times \bar{I}^+_D \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{por}$$

$\overset{o}{\beta}(\overset{o}{\psi},\overset{o}{\varphi}) = \overline{\beta(\psi,\varphi)} = \overline{\varphi}\psi e_1 e_o = \overset{o}{\varphi}\overset{\overline{o}}{\psi} e_1 e_o = \overset{o}{\psi}_2\overset{o}{\varphi}_1 - \overset{o}{\psi}_1\overset{o}{\varphi}_2$ e então , se $u \in \mathbb{R}^+_{1,3}$,

$$\beta(\overset{o}{\psi}u,\overset{o}{\varphi}u) = \beta(\overset{o}{\psi},\overset{o}{\varphi}) \Longleftrightarrow \overline{u}u = I_2 \Longleftrightarrow u \in Spin^+(1,3) .$$

Deste modo, os elementos de $\overline{I}^+_D = \overline{e}\mathbb{R}^+_{1,3}$ (*os a-spinores pontuados*) podem ser vistos como uma representação dos c-*spinores pontuados* de duas componentes, um espaço de representação de $\mathbb{R}^+_{1,3}$. Este é o espaço de representação $D^{(0,1/2)}$ de $SL(2,\mathbb{C})$.

Existe um isomorfismo $\overline{\gamma} : \mathbb{R}^+_{1,3} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\overline{I}^+_D)$ dado por

$$\overline{\gamma}(u).\overset{o}{\psi} = \overset{o}{\psi}.u \ , \quad \overset{o}{\psi} \in \overline{I}^+_D \quad e \quad u \in \mathbb{R}^+_{1,3} .$$

Se $u \in Spin^+(1,3)$ temos $\overline{u}u = u^*u = 1$ e portanto $\overline{\gamma}(u).\overset{o}{\psi} = \overset{o}{\psi}(u^*)^{-1} = \overset{o}{\psi}(\overline{u})^{-1}$.

4.3. REPRESENTAÇÃO DOS c-SPINORES DE DIRAC E A ÁLGEBRA $\mathbb{R}_{1,3}$.

Como vimos em (4.5), $I_D = \mathbb{R}_{1,3}e$ é um espaço bi-dimensional quaterniônico. Podemos considerá-lo com um espaço complexo de dimensão 4 e através desta consideração obtemos uma representação complexa de $\mathbb{R}_{1,3} \simeq \mathbb{R}^+_{1,4} \subset \mathbb{R}_{4,1} \simeq \mathbb{C}(4)$.

Reagrupando os elementos de I_D, temos:

$I_D = e(\phi_1 e + \phi_7 e_1 e_2 e) + e_o e(\phi_2 e + \phi_8 e_1 e_2 e) + e_1 e(\phi_3 e - \phi_4 e_1 e_2 e) +$

$+ e_o e_1 e(\phi_5 e - \phi_6 e_1 e_2 e)$, então

4.14. $I_D = e\psi_1 + e_o e\psi_2 + e_1 e\psi_3 + e_o e_1 e\psi_4$; $\psi_i \in \mathbb{C} \simeq [e, e_1 e_2 e]$. Observe que $I_D^+ = e\psi_1 + e_o e_1 e\psi_4$. Uma base complexa para I_D é $\alpha_D = \{e_o e, e_1 e, e, e_o e_1 e\}$.

Considere agora a injeção

$$\gamma : \mathbb{R}_{1,3} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(I_D) \quad , \ \gamma(u).\psi = u.\psi \ ,$$

$u \in \mathbb{R}_{1,3}$ e $\psi \in I_D$.

Obtemos a seguinte representação para e_i , i=0,1,2,3 na base α_D , identificando $\gamma(e_i) = \gamma_i$

$$\gamma_o = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} \ , \quad i=1,2,3 \quad \text{onde}$$

σ_i são as matrizes de Pauli.

Nesta base, temos a seguinte representação para $u \in \mathbb{R}_{1,3}$

$$u \equiv \gamma(u) = \left[\begin{array}{cc|cc} z_1 & z_2 & z_5 & z_6 \\ z_3 & z_4 & z_7 & z_8 \\ \hline \bar{z}_8 & -\bar{z}_7 & \bar{z}_4 & -\bar{z}_3 \\ -\bar{z}_6 & \bar{z}_5 & -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{array}\right]$$

Considerando a restrição de γ a $\mathbb{R}^+_{1,3}$ temos uma representação complexa para $\mathbb{R}^+_{1,3}$ na base α_D

$$4.6.\quad 1,\ \left[\begin{array}{c|c} \sigma_i & \\ \hline & -\sigma_i \end{array}\right] = \gamma(e_i e_o)\ ;\ \left[\begin{array}{c|c} -\sigma_i\sigma_j & \\ \hline & -\sigma_i\sigma_j \end{array}\right] = \gamma(e_i e_j)\quad ,$$

$$i < j\ ;\quad \gamma(e_o e_1 e_2 e_3) = \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1\sigma_2\sigma_3 & \\ \hline & -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{array}\right] .$$

Assim, se $u \in \mathbb{R}^+_{1,3}$ temos

$$u = \gamma(u) = \left[\begin{array}{cc|cc} z_1 & z_2 & & \\ z_3 & z_4 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & \bar{z}_4 & -\bar{z}_3 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{array}\right] \quad ; \quad z_i \in \mathbb{C}$$

Se $A = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}$ é tal que det A = 1, isto é,

$A \in SL(2,\mathbb{C})$, então $(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{z}_4 & -\bar{z}_3 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}$ (A^*, a transposta conjugada de A) e temos então uma representação complexa quadri-dimensional de $\mathbb{R}^+_{1,3}$ que carrega uma representação complexa do grupo $\mathrm{Spin}^+(1,3) \simeq SL(2,\mathbb{C})$ que é a representação $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ de

$SL(2,\mathbb{C})$.

Chamamos aos elementos $\psi \in I_D$ de a-spinores do espaço-tempo. Da discussão acima fica claro que os a-spinores do espaço-tempo representam em $\mathbb{R}_{1,3}$ os c-spinores de Dirac introduzidos em (II.2.6).

4.7. REPRESENTAÇÃO DOS c-SPINORES DE DIRAC NA ÁLGEBRA $\mathbb{R}_{4,1}$

Temos, por I.3.6 que $\mathbb{R}_{4,1} \simeq \mathbb{C}(4)$, que é a álgebra de Dirac usada pelos físicos. Para identificarmos como esta álgebra está associada com a álgebra do espaço-tempo $\mathbb{R}_{1,3}$ basta procedermos como segue: Seja E_α , $\alpha = 0,1,2,3,4$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}_{4,1}$. Defina $e_\mu = E_\mu E_4$, $\mu = 0,1,2,3,\ldots$ temos $e_0^2 = 1$, $e_k^2 = -1$ $k = 1,2,3$ e considere g o isomorfismo que é a extensão linear de $\bar{g}(e_\mu) = E_\mu E_4$, $\mu = 0,1,2,3$, $g : \mathbb{R}_{1,3} \longrightarrow \mathbb{R}^+_{4,1}$. Desde que por 4.4 e 4.5 , $f(e_{30})$ é um elemento idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{1,3}$ temos que $g(f(e_{30}))$ é idempotente primitivo de $\mathbb{R}^+_{4,1}$. Assim; $\bar{I}_D = \mathbb{R}^+_{4,1} g(f(e_{30}))$ é um espaço vetorial 4-dimensional complexo cujos elementos são chamados os a-spinores de Dirac, que por sua vez são representantes em $\mathbb{R}_{4,1}$ dos c-spinores de Dirac.

4.8. CONCLUSÕES

As álgebras

$\mathbb{R}_{3,0} \simeq \mathbb{R}_{1,2} \simeq \mathbb{C}(2)$

$$\mathbb{R}_{1,3} \simeq \mathbb{R}_{4,0} \simeq \mathbb{R}_{0,4} \simeq \mathbb{H}(2)$$

$$\mathbb{R}_{4,1} \simeq \mathbb{R}_{2,3} \simeq \mathbb{R}_{0,5} \simeq \mathbb{C}(4) ,$$

contêm todas as informações à respeito dos conceitos físicos relacionados com spinores.

Por 4.1 temos:

$$\mathbb{C}(2) \simeq \mathbb{R}_{3,0} \overset{f}{\simeq} \mathbb{R}^+_{1,3} \subset \mathbb{R}_{1,3} \overset{g}{\simeq} \mathbb{R}^+_{4,1} \subset \mathbb{R}_{4,1} \simeq \mathbb{C}(4) .$$

Os a-spinores de Pauli, que são os elementos de um ideal minimal de $\mathbb{R}_{3,0}$ são os "geradores" dos demais a-spinores, c-spinores e o-spinores.

De fato: Se e é um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{3,0}$ temos por: 4.3 que

$$I_p^+ = \mathbb{R}^+_{3,0}e \simeq \mathbb{C}^2 .$$

Desde que I_p^+ é um espaço de representação de $\mathbb{R}_{3,0}$ e Spin(3,0) é o grupo que deixa invariante a "métrica spinorial" $\beta : I_p^+ \times I_p^+ \longrightarrow \mathbb{C}$, $\beta(\psi,\varphi) = \tilde{\psi}\varphi$, $\psi,\varphi \in I_p^+$. Assim, I_p^+ e o grupo Spin(3,0) que atua em I_p^+ definem os spinores covariantes (2.1)

Os a-spinores não pontuados são os elementos do ideal $I_D = \mathbb{R}^+_{1,3}f(e) \simeq \mathbb{C}^2$, através do isomorfismo f de 4.4. $\mathbb{R}_{3,0} \overset{f}{\simeq} \mathbb{R}^+_{1,3}$. Em vista disto, I_D é um espaço de representação de $\mathbb{R}^+_{1,3}$ e $\mathrm{Spin}^+(1,3) \simeq SL(2,\mathbb{C})$ é o grupo que deixa a métrica spinorial $\beta : I_D \times I_D \longrightarrow \mathbb{C}$, $\beta(\psi,\varphi) = e_0e_1\bar{\psi}\varphi$, $\psi,\varphi \in I_D$. Assim I_D e o grupo $Spin^+(1,3)$ definem os spinores covariantes de (2.1).

De maneira análoga, define-se os spinores pontuados de duas componentes, bastando para tal considerarmos como a-spinores os elementos do ideal minimal à direita $\overline{I}_D^+ = (\mathbb{R}_{1,3}^+ f(e))^*$.

E finalmente, desde que $f(e)$ é um idempotente minimal de $\mathbb{R}_{1,3} \simeq \mathbb{H}(2)$ e como $\mathbb{R}_{1,3} \simeq \mathbb{R}_{4,1}^+ \subset \mathbb{R}_{4,1} \simeq \mathbb{C}_4$, obtemos uma representação de $\mathbb{R}_{1,3}$ dentro de $\mathbb{C}(4)$, cujo espaço de representação é

$$I_D = \mathbb{R}_{1,3} f(e) \simeq \mathbb{C}^4$$

O grupo $Spin^+(1,3)$ atua em $\mathbb{C}^4$ da seguinte maneira, dado $v \in Spin^+(1,3)$, $\psi_i \in \mathbb{C}$, $i=1,2,3,4$.

$$\left[\begin{array}{c|c} v & \\ \hline & (v^*)^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = [v] \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \oplus \left[(v^*)^{-1}\right] \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

Desde que $\mathbb{R}_{1,3} \overset{g}{\simeq} \mathbb{R}_{4,1}^+$ por 4.7

$$\overline{I}_D = \mathbb{R}_{4,1}^+ g(f(e)) \simeq I_D$$

que é um espaço de representação de $\mathbb{R}_{4,1}^+$ cujos elementos são os a-spinores de Dirac.

Nas referências [12,13,14,15] Hestenes da uma nova definição dos spinores de Dirac que nós chamamos de spinor operatorial (o-spinor).

SPINOR OPERATORIAL DE DIRAC. Um o-spinor de Dirac ψ é um elemento de $\mathbb{R}^+_{1,3}$, $\psi^*\psi = 1$, tal que se $\gamma^\mu \in \mathbb{R}^{1+3}$, então $V^\mu = \psi\gamma^\mu\psi^* \in \mathbb{R}^{1+3}$.

Esta definição de spinor operatorial nada mais é do que dizer que um o-spinor de Dirac ψ é um elemento do grupo $Spin^+(1,3)$.

De fato: Por (I.9.10). $Spin^+(1,3) = \{\psi \in \mathbb{R}^+_{1,3} ; \bar{\psi}\psi = 1\}$ e como $\psi \in \mathbb{R}^+_{1,3}$ temos $\bar{\psi} = \psi^*$.

Além do mais, o grupo $Spin^+(1,3)$ é um recobrimento duplo de $SO^+(1,3)$ através da aplicação

$$\begin{aligned} \xi_o : Spin^+(1,3) &\longrightarrow SO^+(1,3) \\ \psi &\longrightarrow \xi_o(\psi).v = \alpha(\psi).v.\psi^{-1} \end{aligned}$$

$\psi \in Spin^+(1,3)$, $v \in \mathbb{R}^{1+3}$.

Desde que $\psi \in Spin^+(1,3)$ temos $\alpha(\psi) = \psi$ e $\psi^* = \bar{\psi} = \psi^{-1}$ e portanto $\psi\gamma^\mu\psi^* \in \mathbb{R}^{1+3}$ para $\gamma^\mu \in \mathbb{R}^{1+3}$.

De maneira análoga podemos chamar aos elementos do grupo $Spin(3,0)$ de o-spinor de Pauli. A definição de o-spinor foi generalizada para álgebras de Clifford arbitrárias por Dimakis [21].

CAPÍTULO III

ESTRUTURA SPINORIAL EM VARIEDADES LORENTZIANAS DE DIMENSÃO 4

III.1. INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste Capítulo é estudar em que condições uma variedade Lorentziana de dimensão 4 admite uma estrutura spinorial (III.5.1 e 5.2.). Este problema é de relevância para a Física pois as variedades Lorentzianas de dimensão 4 são consideradas como modelos dos espaço-tempo da teoria da Relatividade Geral, e campos spinoriais aparecem naturalmente na descrição dos fermions, que são partículas de spin ½ (como o eletron, por exemplo).

Uma estrutura spinorial consiste na existência de um segundo fibrado principal que seja o recobrimento do fibrado principal dos frames positivamente orientados de L, no sentido de que se possa encontrar um sistema de troca de bases spinoriais que seja o recobrimento da correspondente troca de frames do fibrado tangente.

O método de resolver está questão esta baseado nos conceitos de extensão de estrutura, em particular, estrutura spinorial (III.5.1) e (III.5.2). Com a definição de fibrado de Clifford de fibrados pseudo-Riemannianos dada em (III.2.5), e com as estruturas de seus espaços de representação, propomos uma nova visão do que significa uma variedade Lorentziana ter uma estrutura spinorial.

Com esta técnica, ainda não explorada anteriormente, conseguimos demonstrar que toda variedade Lorentziana de signatura (3.1) admite um elemento idempotente global no fibrado de Clifford, e quais as restrições que uma estrutura spinorial em L acarreta em $P_{SO^+(3),1}(L)$.

Deixamos como proposta, a reinterpretação do teorema de Geroch [26], sob o ponto de vista da teoria dos fibrados de Clifford.

III.2. VARIEDADES PSEUDO-RIEMANNIANAS

2.1. Uma variedade *pseudo-Riemanniana* é uma variedade M conexa com uma função contínua (ou C^r), $G: TM \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a restrição de G a T_xM é uma forma quadrática *não-degenerada*.

$$g \equiv G|_{T_xM} \; ; \; g(v,v) = (v,v)_x \; , \quad v \in T_xM \; , \; x \in M.$$

As componentes de G com relação a uma base $\{e_\alpha\}_x$ de T_xM são:

$$g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta) = g(e_\beta, e_\alpha) = \langle e_\alpha, e_\beta \rangle ,$$

isto é, as componentes são simplesmente o produto escalar dos vetores da base. Em termos das componentes, a métrica é não-degenerada se a matriz $(g_{\alpha\beta})$ das componentes de g é não singular.

A signatura de G num ponto $x \in M$ é o número de autovalores positivos da matriz $(g_{\alpha\beta})$ em x menos o número de autovalores negativos. Se G é não degenerada e contínua, a signatura é constante em M.

É possível escolher uma base $\{e_\alpha\}$ tal que para cada ponto $x \in M$.

$$(g_{\alpha\beta})_x = \mathrm{diag}(\underbrace{+1,+1,\ldots,+1}_{p},\underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{q}) \; , \quad p+q = n$$

onde $p-q$ é a signatura de G e n é a dimensão de M. Denotaremos uma métrica de signatura $p-q$ por (p,q).

2.2. FIBRADO DE BASES

De maneira análoga ao caso Riemanniano podemos construir o fibrado de bases $B(M)$ para M^n variedade pseudo-Riemanniana. Um frame u em um ponto $x \in M$ é uma base ordenada de T_xM. $B(M)$ é o conjunto de todos os "frames" u em todos os pontos de M. π é a aplicação de $B(M)$ sobre M que leva um frame linear u no ponto x em $x \in M$. O grupo linear $GL(n,\mathbb{R})$, atua em $B(M)$ à direita como segue:

Se $a = (a_i^j) \in GL(n,\mathbb{R})$ e $u = (X_1,\ldots,X_n)$ um frame em x então $u.a$ é um frame $(Y_1,\ldots,Y_n)$ em x definido por $Y_i = \sum_j a_i^j X_j$.

Uma estrutura pseudo-Riemanniana em M^n dá uma redução do grupo $GL(n,\mathbb{R})$ de $B(M)$. Mais especificamente: quando existe uma métrica G de signatura (p,q) com $p+q = n$ em M^n podemos definir um subfibrado de $B(M)$, o fibrado dos frames ortonormais $F(M)$ que consiste das bases ortonormais (com relação a G) em todos os pontos de M. $F(M)$ é um fibrado principal com grupo estrutural $O(p,q)$ subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$. $O(p,q)$ consiste das matrizes não singulares $(a_i^j) \in GL(n,\mathbb{R})$ tais que:

2.3. $$a_i^j\, g_{jk}\, a_\ell^k = g_{i\ell} \quad (a^t g a = g)$$

onde g_{ik} é a matriz $\mathrm{diag}(\underbrace{+1,\ldots,+1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q})$. Denotaremos $F(M)$

por $P_{O(p,q)}(M)$.

2.4. MÉTRICA PSEUDO-RIEMANNIANA NUM FIBRADO VETORIAL

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial n-dimensional sobre M. Uma métrica pseudo-riemanniana em E é uma associação de uma forma bilinear simétrica não degenerada de signatura (p,q) com $p+q = n$ definida continuamente em cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in M$. De maneira análoga podemos definir $P_{O(p,q)}(E)$

2.5. FIBRADO DE CLIFFORD DE UM FIBRADO PSEUDO-RIEMANNIANO

Seja $\pi: E \to M$ um fibrado vetorial pseudo-Riemanniano. Desde que cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in M$ é um espaço vetorial isomorfo a $\mathbb{R}^n$ com uma forma quadrática $Q_x \equiv G|_{E_x}$ de signatura (p,q), podemos formar o fibrado de Clifford C(E) de E. Este será um fibrado de algebras cuja fibra em cada ponto $x \in M$ é a algebra de Clifford $C(E_x, -Q_x)$, onde $-Q_x$ é a forma quadrática de signatura (q,p). Contidos em C(E), temos os fibrados Pin(E) e Spin(E)

Observe que $C(E_x,-Q_x) \simeq \mathbb{R}_{q,p}$

2.6. PROPOSIÇÃO: O fibrado C(E) é um fibrado associado ao fibrado principal $P_{O(p,q)}(E)$, isto é, $C(E) = P_{O(p,q)}(E) \times_{O(p,q)} \mathbb{R}_{q,p}$

DEMONSTRAÇÃO: O grupo O(p,q) atua em $\mathbb{R}^n \simeq E_x$, $(p+q = n)$ à esquerda de maneira canônica. Esta ação se estende a uma ação de O(p,q) em $\mathbb{R}_{q,p}$ como automorfismos de algebras.

Considerando o $E_x \simeq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+q}$ munido da forma quadrática $-Q_x = \bar{Q}_x$, estamos identificando $v^2 \equiv \bar{Q}_x$, $v \in E_x$ e então $C(E_x,Q_x) \simeq \mathbb{R}_{q,p}$. Assim a ação de $O(p,q)$ em E_x pode ser dada por um elemento $g \in \mathbb{R}^*_{q,p}$ através da aplicação $\tilde{Ad}_g$: $v \longmapsto \alpha(g) . v . g^{-1}$ (um elemento do grupo $\Gamma(q,p)$). Esta aplicação se estende a toda algebra pois

$$\mathbb{R}^n \simeq T_xM \longmapsto T_xM \subset \mathbb{R}_{q,p}$$

$$v \longmapsto \tilde{Ad}_g(v) = \alpha(g).v.g^{-1} \ , \ (\tilde{Ad}_g(v))^2 = v^2 \equiv -Q_x = \bar{Q}$$

Assim temos uma aplicação de $\mathbb{R}_{q,p} \longrightarrow \mathbb{R}_{q,p}$. Considere $\{e_i\}$ $i = 1,\ldots,n$ uma base Q-ortonormal de $T_xM \simeq \mathbb{R}^n$; $Q(e_i) = 1$, $i = 1,\ldots,p$ e $Q(e_i) = -1$, $i = q,\ldots,n$,

Desde que $\mathrm{Pin}(q,p) \subset \mathbb{R}_{q,p}$ e $\tilde{Ad}\big|_{\mathrm{Pin}(q,p)} : \mathrm{Pin}(q,p) \to O(p,q)$ é sobre dada $A = (Q_i^j) \in O(p,q)$, existe $\pm g \in \mathrm{Pin}(q,p)$ tal que

$$\alpha(g) . \ell_j \, g^{-1} = \sum_j (a_i^j) e_i$$

Diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}_{q,p} \supset \mathbb{R}^{p+q} \arrow[d] \\
\mathbb{R}^{p+q} \arrow[ur, "\text{extensão única}"] \arrow[r, "\tilde{Ad}_g"', "g \in \mathbb{R}^*_{p,q}"'] & \mathbb{R}^{q+p} \subset \mathbb{R}_{q,p} \arrow[u, dashed, bend right, "\tilde{Ad}_g \quad g \in \mathrm{Pin}(p,q)"']
\end{tikzcd}$$

2.7. OBSERVAÇÃO: A única ação de $O(p,q)$ em E_x que se estende a uma ação em $\mathbb{R}_{p,q}$ pela $\tilde{A}d$ é pela identidade.

III.3. VARIEDADES LORENTZIANAS

3.1. Uma variedade, pseudo-Riemanniana conexa, paracompacta e não compacta com métrica G de signatura $(1,q)$ ou $(p,1)$ $(q = p = n-1)$ é chamada *variedade Lorentziana*. Neste caso a métrica G é chamada *métrica de Lorentz*. As variedades Lorentzianas serão denotadas por $\bar{L} \equiv L^{1,n-1}$ e $L \equiv L^{n-1,1}$

Com uma métrica de Lorentz em $\bar{L}_*(L)$ os vetores não nulos em $x \in \bar{L}(L)$ podem ser divididos em tres classes: um vetor $X \in T_x\bar{L}$ (T_xL) é dito tipo tempo, tipo luz ou tipo espaço se $g(X,X)$ é positivo(negativo), zero(zero) ou negativo(positivo) respectivamente

3.2. Uma direção em $x \in L(\bar{L})$ é um sub-espaço de dimensão 1 em $T_xL(T_xL)$.

Vamos mostrar agora que podemos dividir o conjunto $\tau \subset T_x\bar{L}$ de todos os vetores tipo tempo em dois subconjuntos disjuntos τ^+ e τ^- que identificaremos por convenção em futuro e passado (Obviamente uma divisão análoga existe para o caso T_xL)

3.3. PROPOSIÇÃO: A relação $u \uparrow v$, $(u,v \in T_x\bar{L})$ definida por $u \uparrow v$ se e somente se $g(u,v) > 0$ é uma relação de equivalência para vetores tipo-tempo e esta relação divide τ em duas classes de equivalência disjuntas τ^+ e τ^-

PROVA: Primeiramente consideremos e_o, $g(e_o,e_o) = 1$, como a direção do futuro e adicionemos a ele q vetores tipo espaço e_i, $g(e_i,e_i) = -1$, $i = 1,\ldots,q$, de maneira a construirmos uma base ortonormal $\{e_\mu\}$ $\mu = 0,\ldots,q$. Se $u,v \in \tau$ temos $u = (u^o,u^1,\ldots u^q)$ e $v = (v^o,v^1,\ldots,v^q)$ nesta base com $(u^o)^2 > \sum_i (u^i)^2$, $(v^o)^2 > \Sigma(v^i)^2$ e $g(u,v) = u^o v^o - \sum_i u^i v^i$. Então observamos que se u^o,v^o tem o mesmo sinal, $g(u,v) > 0$ e se u^o,v^o tem sinais opostos $g(u,v) < 0$. De fato, pela desigualdade de Schwarz em R^q, temos

$$((u^i)^2)^{\frac{1}{2}}(\Sigma(v^i)^2)^{\frac{1}{2}} \geq \sum_i u^i v^i \Rightarrow |u^o||v^o| > \Sigma u^i v^i$$

Portanto $\uparrow$ é obviamente uma relação de equivalência que divide τ em duas classes de equivalência, τ^+ tal que se $u \in \tau^+$, $g(u,e_o) > 0$ e τ^- tal que se $u \in \tau^-$, $g(u,e_o) < 0$. τ^+ é dita a componente do futuro de τ e τ^- a componente do passado.

3.4. PROPOSIÇÃO. Numa variedade paracompacta $\bar{L}$, a existência de um campo contínuo de direções é equivalente a existência de uma métrica de Lorentz G em $\bar{L}$.

PROVA[27]. Suponha que $\bar{L}$ admite um campo contínuo de direções. Desde que $\bar{L}$ é paracompacta, $\bar{L}$ admite uma métrica G positiva definida (estrutura Riemanniana, ref. [27, pág. 126]. Seja $v \in T_x\bar{L}$ um vetor unitário (determinado a menos de sinal) do campo de direções em $x \in \bar{L}$. Defina a métrica de Lorentz G a partir de $\hat{G}$ da seguinte forma:

$$g(u,w) = \frac{2\hat{g}(v,u).\hat{g}(v,w)}{\hat{g}(v,v)} - g(u,w)$$

em cada ponto $x \in \bar{L}$. (Observe que $g(v,v) = g(-v,-v)$ e portanto não importa qual é o vetor escolhido, se v ou $-v$). Temos assim, $g(v,v) = \hat{g}(v,v)$ e se u,w são ortogonais a v com relação a $\hat{g}$, são também ortogonais a v com relação a g e $g(u,w) = -\hat{g}(u,w)$ e portanto G é uma métrica de Lorentz, $g \equiv G|_{T_x\bar{L}}$. Como $\hat{g}$ não é única, g também não é.

Reciprocamente, se G é uma métrica de Lorentz dada, considere a equação

$$g_{\alpha\beta}X^{\beta} = \lambda\hat{g}_{\alpha\beta}X^{\beta} \quad \text{onde} \quad g \equiv G|_{T_xM} ,$$

$\hat{G}$ é uma métrica positiva definida ($\bar{L}$ é paracompacta) e X são as componentes de um vetor de $T_x\bar{L}$ com relação a uma base $\{e_\beta\}$. Temos então um autovalor positivo e $q = n-1$ autovalores negativos. Para cada ponto $x \in \bar{L}$ o autovalor v (determinado a menos do sinal) correspondente ao autovalor positivo é um vetor tipo-tempo. Este autovetor tipo-tempo determina um campo contínuo de direções em L.

OBSERVAÇÃO 1. De fato, toda variedade não compacta admite um campo contínuo de direções enquanto que, uma variedade compacta admite, se e somente se sua característica de Euler for zero. Uma variedade para representar um modelo razoável do universo deve ser não compacta, por isso trabalharemos com variedades Lorentzianas não compactas.

OBSERVAÇÃO 2. Uma proposição análoga vale para as variedades L que tem signatura (p,1)

3.5. COROLÁRIO. Suponha $\bar{L} = L^{1,n-1}$ paracompacta. $\bar{L}$ é uma variedade Lorentziana $\Longleftrightarrow$ $T\bar{L} = \theta^1 + \eta^{(n-1)}$, θ^1, trivial.

Em vista do corolário acima temos que o grupo estrutural $GL(n,\mathbb{R})$ de $T\bar{L}$ se reduz a $O(1,n-1)$, assim

$$T\bar{L} = P_{O(1,n-1)} \times_{O(1,n-1)} \mathbb{R}^n .$$

III.4. VARIEDADES LORENTZIANAS DE DIMENSÃO 4

Seja $\bar{L}$ variedade Lorentziana de dimensão 4. O grupo estrutural de $T\bar{L}$ é o grupo $O(1,3)$, chamado grupo de Lorentz. Por (2.5) temos que se $\ell = (\ell_i^j) \in O(1,3)$, $i,j = 0,1,2,3$ então

4.1. $$\ell^t g \ell = g \quad \text{onde} \quad g = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

e portanto temos:

4.2. $$\det \ell = \pm 1 \quad \text{e}$$

4.3. $$(\ell_o^o)^2 - (\ell_o^1)^2 - (\ell_o^2)^2 - (\ell_o^3)^2 = 1 .$$

Desta forma, $(\ell_o^o)^2 \geq 1$ e temos então que o grupo de Lorentz $O(1,3)$

tem 4-componentes conexas, a saber:

4.4. det $\ell = 1$ e $\ell_o^o \geq 1$

det $\ell = -1$ e $\ell_o^o \geq 1$

det $\ell = 1$ e $\ell_o^o \geq 1$

det $\ell = -1$ e $\ell \leq 1$.

4.5. As transformações de Lorentz ℓ para as quais $\ell_o^o \geq 1$ formam um grupo chamado *grupo de Lorentz ortocrono*. Tais transformações deixam qualquer vetor $u \in \tau(3.3)$ em sua classe de equivalência respectiva.

4.6. As transformações de Lorentz ℓ para as quais det $\ell = 1$ e $\ell_o^o \geq 1$ formam um grupo chamado *grupo de Lorentz próprio* denotado por $SO^+(1,3)$. Tais transformações preservam a orientação dos vetores tipo espaço, além de deixarem qualquer $u \in \tau$ em sua classe de equivalência ($SO^+(1,3)$ é constituído por toda a componente conexa do grupo Lorentz $O(1,3)$ que contém a identidade).

OBSERVAÇÃO: No caso de L cuja signatura é $(3,1)$ o grupo estrutural de TM é $O(3,1)$, etc.

4.7. ORIENTAÇÃO[24]. Seja $\bar{L}$ $(1,3)$ uma variedade Lorentziana de dimensão 4, Hausdorff e conexa, com G uma métrica de Lorentz. Dizemos que $(\bar{L},G)$ é *orientada* (no espaço e no tempo), se existe uma forma diferenciável ω de grau 4 não nula, em todos os pontos de $\bar{L}$

(que é a condição para que uma variedade 4-dimensional Riemanniana seja orientável (A.4.2)) e um campo de direções tipo tempo X_o(isto é, a cada ponto $x \in L$, está associado o par $(X_o,-X_o)$, $X_o \in T_x\bar{L}$ tal que $g(X_o,X_o) > 0$ $(g \equiv G|_{T_x\bar{L}})$ de maneira contínua em todos os ontos de L.

Dois pares (ω,X_o) e (ω',X_o') como acima são equivalentes se $\omega' = f\omega$, onde f é uma função positiva e $g(X_o,X_o') > 0$. Uma orientação de $(\bar{L},G)$ é a escolha de uma classe de equivalência $\{\omega , X_o\}$ que é chamada uma orientação. Um par $((\bar{L},G),\{\omega,X_o\})$ é uma variedade Lorentziana de dimensão 4 orientada.

Escolhendo agora uma orientação $\{\omega,X_o\}$ para $(\bar{L},G)$ e recordando que um vetor tangente tipo tempo Y é orientado para o futuro, isto é $Y \in \tau^+$ e $g(X_o,Y) > 0$ diremos que uma quádrupla (Y_o,Y_1,Y_2,Y_3) de vetores tangentes está positivamente orientada se $Y_o \in \tau^+$ e $\omega(Y_o,Y_1,Y_2,Y_3) > 0$. Chamaremos tal quádrupla de tetrada.

O conjunto de todas as tetradas (Y_o,Y_1,Y_2,Y_3) tem uma estrutura natural de fibrado principal sobre τ com grupo estrutural $SO^+(1,3)$. Denotaremos tal fibrado por $SO^+(1,3)$

III.5. ESTRUTURA SPINORIAL

Neste parágrafo propomos, usando a teoria desenvolvida sobre álgebras de Clifford reais e seus espaços de representações, uma análise da definição de estrutura spinorial [22,23] via fibrado de Clifford. Um critério para se detectar se uma variedade Lorentziana L de signatura (1,3) orientada e não compacta admite uma estrutrura spinorial é dado por Geroch [26]. "L nas condições acima, admite uma estrutura spinorial se e somente se, existem quatro campos de vetores tangentes em L que constituem uma "tetrada" em cada ponto do espaço tangente". Geroch demonstrou este teorema usando técnicas de topologia algébrica. Mais especificamente [31], que é a única classe de obstrução para encontrar uma secção global do fibrado spinorial está em $H^4(L,\mathbb{Z})$ e portanto se L é orientada $H^4(L,\mathbb{Z}) = 0$.

Conseguimos demonstrar que toda variedade Lorentiziana de dimensão 4 e signatura (3,1) possui um idempotente primitivo globalmente definido no fibrado de Clifford e com isto propomos uma nova visão de espaços spinoriais usando os resultados obtidos no Capítulo II.

5.1. EXTENSÃO DE ESTRUTURA [22]: Seja B um fibrado principal sobre uma variedade M com grupo estrutural um grupo de Lie G. Seja $p : H \longrightarrow G$ um homomorfismo de um grupo de Lie H sobre G. Por uma *extensão de estrutura* entendemos um fibrado $\overline{B}$ sobre M com grupo estrutural H e uma aplicação $S : \overline{B} \longrightarrow B$ tal que o seguinte diagrama comute

$$\begin{tikzcd}
\bar{B} \times H \arrow[rr, dash, "S\times p"] \arrow[d, "\hat{R}"'] & & B \times G \arrow[d, "\hat{R}"] \\
\bar{B} \arrow[rr, dash, "S"] \arrow[dr] & & \bar{B} \arrow[dl] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

onde $\hat{R}$ significa multiplicação à direita. Isto significa que para $s \in \bar{B}$, ambos s e $S(s)$ estão sobre o mesmo ponto de M, e S restrita a uma fibra é equivalente a p.

5.2. DEFINIÇÃO [22]. No caso de B (acima) ser o fibrado principal de uma variedade Riemanniana orientada com grupo estrutural $G = SO(n)$ e $H = Spin(n)$ seu recobrimento universal ($n > 2$) chama-se $\bar{B}$ de uma *estrutura spinorial* de M. (Esta é a definição de Milnor [23]).

5.3. Para variedades Riemannianas orientadas [24], uma condição necessária e suficiente para admitir uma estrutura spinorial é que $W_2(M) = 0$ ($W_2(M)$ é a segunda classe de Stiefel Whitney de M). Esta estrutura é única se e somente se $H^1(M,\mathbb{Z}_2) = 0$.

5.4. Vamos passar agora ao caso das variedades Lorentzianas de dimensão quatro.

No caso de M ser uma variedade Lorentziana de dimensão quatro orientada (no espaço e no tempo), o grupo estrutural do fibrado tangente de L (que é $SO^+(1,3)$ ou $SO^+(3.1)$, dependendo da signatura de L ser (1,3) ou (3,1)) cujo recobrimento é o grupo $SL(2,\mathbb{C}) \approx Spin^+(1,3) \approx Spin^+(3,1)$.

5.5. DEFINIÇÃO. Seja L, uma variedade Lorentziana de dimensão 4, orientada de signatura (3,1). Uma estrutura spinorial em TL é um $Spin^+(1,3)$-fibrado principal junto com um recobrimento duplo

$S : P_{Spin^+(1,3)}(L) \longrightarrow P_{SO^+(3,1)}(L)$ tal que $S(p.u) = S(p).\tilde{Ad}_u$

$\forall p \in P_{Spin^+(1,3)}(L)$ e $\forall u \in Spin^+(1,3)$. Observe que S restrita a fibra é $\tilde{Ad}$. O diagrama dá fibração é

$$\begin{tikzcd}
 & Spin^+(1,3) \arrow[r, dash, "\tilde{Ad}"] \arrow[d] & SO^+(3,1) \arrow[d] \\
\mathbf{Z}_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & P_{Spin^+(1,3)}(L) \arrow[r, dash, "S"] \arrow[dr] & P_{SO^+(3.1)}(L) \arrow[d] \\
 & & L
\end{tikzcd}$$

5.6. PROPOSIÇÃO. Se L é uma variedade Lorentziana com métrica de signatura (3,1) então existe em $C(L)$ um idempotente minimal globalmente definido de maneira contínua em todos os pontos $x \in L$.

PROVA. Se L tem signatura (3,1), então existe um campo de direções X_o (determinado a menos de sinal); $X_o \in T_xL$, $g_x(X_o, X_o) < 0$ onde $G_x \equiv G|_{T_xM}$, definido de maneira contínua para cada $x \in L$.

Considere o fibrado de Clifford $C(L)$ de TL onde cada fibra sobre x é a álgebra de Clifford $C(T_xL, \bar{Q}_x)$ onde $\bar{Q}_x = -g_x$. Seja $e_{o_x} = \dfrac{X_o}{(-g(X_o, X_o))^{1/2}}$, temos então $e_{o_x}^2 = \bar{Q}(e_{o_x}) = 1$. Com este elemento podemos construir $e_x = \frac{1}{2}(1 + e_{o_x})$ que é um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{1,3}$ em todos os pontos $x \in L$ (I.5.17).

5.7. OBSERVAÇÃO. A construção que fizemos em (2.5) do fibrado de Clifford de L pode ser feita de maneira análoga estendendo-se a ação de $SO(p,q)$ de $\mathbb{R}^{p+q}$ a $\mathbb{R}_{p,q}$ através da aplicação Adjunta: $Ad_g : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}$: $Ad_g(v) = g.v.g^{-1}$, $g \in \mathbb{R}^*_{p,q}$, $v \in \mathbb{R}^{p+q}$.

Deste modo, a proposição anterior também é validade para variedades Lorentzianas de dimensão 4 e signatura (1,3). Observe que neste caso, $C(T_xL, Q_x) \simeq \mathbb{R}_{1,3}$ onde $Q_x = g_x$.

Graff afirma em [29], que as variedades Lorentzianas de signatura (3,1) não admitem um idempotente global. Tal afirmação ele fez por desconhecer a constrção do fibrado de Clifford que fizemos em (2.5).

CONCLUSÕES

Seja L uma variedade Lorentziana de dimensão 4 e signatura (3,1) ou (1,3) não compacta.

L é orientada (no espaço e no tempo), se e somente se, seu grupo estrutural se reduz a $SO^+(1,3)$. Neste caso se θ^1 é o fibrado de retas determinado pelo campo e_{o_x} (definido de maneira contínua em todos os pontos $x \in L$ e agora determinado univocamente pela orientação no tempo) e η é seu complemento ortogonal (um fibrado tri-dimensional tipo-espaço) temos $TL = \theta^1 \oplus \eta$ onde η é orientado, [31] cujo grupo estrutural é $SO(3)$.

O campo e_{o_x} determina um elemento $e_x = \frac{1}{2}(1 + e_{o_x})$ que é um idempotente primitivo do fibrado de Clifford $C(L)$. Tal idempotente dá uma "secção de ideais minimais" do fibrado $C(L)$, a saber $I = \mathbb{R}_{1,3}e_x$, para cada $x \in L$ de maneira contínua.

No capítulo II conseguimos representar os c-spinores pontuados e não pontuados de duas componentes como elementos de ideais minimais $I^+ = \mathbb{R}^+_{1,3}e^+$ onde e^+ é um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{1,3}$ e de $\mathbb{R}^+_{1,3}$. Tais ideais são espaços vetoriais complexos bidimensionais à direita (espaços de representação da álgebra real $\mathbb{R}^+_{1,3}$), e o grupo $Spin^+(1,3)$ atua por multiplicação à esquerda.

Com esta nova visão de espaço de spinores acreditamos que seja possível reinterpretar o teorema de Geroch[26], a saber:

"Seja L uma variedade Lorentziana de signatura (1,3), não compacta e orientada (no espaço e tempo), L admite uma estrutura spinorial, se, e somente se, existem quatro campos de vetores tangentes em L que constituem uma "tetrada" em cada ponto do espaço tangente de L, definido de maneira contínua", bem como, ter uma visão mais algébrica dos resultados recentes de Penrose e Rindler[30], passando a considerar o fibrado spinorial como um fibrado vetorial associado a $P_{Spin^+(1,3)}(L)$ a saber

$$S^+(E) = P_{Spin^+(1,3)}(L) \times_{Spin^+(1,3)} I^+ .$$

REFERÊNCIAS

[1] M.F. ATIYAH, R. BOTT and A. SHAPIRO, Topology 3, supp. 1,3 (1964).

[2] C. CHEVALEY, The Algebraic Theory of Spinors, Columbia Univ. Press, N. York (1954).

[3] H. BLAINE LAWSON Jr. and M.L. MICHELSOHN, Spin Geometry, edited by Univ. Federal do Ceará, Brasil (1983).

[4] M. RIESZ, Clifford Numbers and Spinors, Lecture Notes nº 38. Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Univ. of Maryland (1958).

[5] C. REINE e R. VILLANOVA, Spin Groups in Physics, preprint, Istituto di Science Fisiche, Univ. di Milano (1986).

[6] B. FELZENSZWALB, Algebras de Dimensão Finitas, 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979.

[7] P. LOUNESTO, Scalar Products of Spinors and an Extension of Braver-Wall Groups, Found. of Physics, 11, 721 (1981).

[8] W. MILLER Jr., Symmetry Groups and their Applications, Academic Press, N. York, San Francisco, London (1972).

[9] I.R. PORTEOUS, Topological Geometry, second edition, Cambridge University Press (1981).

[10] E. CARTAN, Theory of Spinors, Dover, New York (1966).

[11] R. BRAUER and H. WEYL, Amer. J. Math., 57, 425 (1935).

[12] D. HESTENES, J. Math. Phys., 8, 798 (1967).

[13] D. HESTENES, J. Math. Phys., 16, 556 (1975).

[14] D. HESTENES, A.J. Phys., 39, 1013 (1971); 39, 1028 (1971).

[15] D. HESTENES, in J.S.R. Chisholm and A.K. Common (eds). Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, D. Reidel (1986).

[16] L.A. SANTALÓ, Geometria Espinorial, edited by Consejo Nacional de Inv. Cient. y Tecnica, Inst. Argentino de Matemãtica, Buenos Aires, Argentina (1976).

[17] M.A. NAIMARK, Linear Representations of the Lorentz Group, Pergamon Press, Oxford (1984).

[18] B.L. VAN der WAEEDEN, "Group Theory and Quantum Mechanics" , Springer, Berlin (1932).

[19] L.D. LANDAU and E.M. LIFSCHITZ, Relativistic Quantum Theory, Addison-Wesley Pub. Comp. Inc., Reading, Massachusets (1971).

[20] P.P. SRIVASTRAVA, Revista Brasileira de Física, 4, 507 (1974).

[21] A. DIMAKIS, in J.S. Chisholm and A. Common (eds), "Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics". D. Reidel (1986).

[22] G. CHICHILNISKY, Group Action on Spin Manifolds, Trans.Amer. Math. Soc. 172, 307, (1972)

[23] J.MILNOR - Spin Structure on Manifolds, L'Enseignement Mathematique, 9 198 (1963)

[24] J.MILNOR, Remarkes Concerning Spin Manifolds, Princeton University

[25] K.BICHTELER, Global Existence of Spin Structures for Gravitational Fields, J.Math. Phys., 9 813 (1968)

[26] B.GEROCH, Spinor Structure of Space-Time in General Relativity, I.J.Math. Phys. 9 1739 (1968)

[27] K.BUGAJSKA, Spinor Structure of Space-Time, Int.J.Theor.Phys, 18, 77 (1979).

[28] A.CRUMEYROLLE, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 27, 53 (1975)

[29] W. GRAF , An Inst. Henri Poincaré, XXIX, 85-109 (1978).

[30] R. PENROSE, W. RINDLER, Spinors and Space-Time, Cambridge University Press, 1986.

[31] G.S. WHISTON, Topics on Space-Time Topology (III), International Journal of Theorical Physics, Vol. 12, Nº 4 (1975) , pp. 225-240.